

# SOBRE O PROJETO DO NÍVEL DE ENTRELAÇAMENTO PARA TRANSMISSÃO DE CÓDIGOS DE BLOCO EM CANAIS COM MEMÓRIA

Rodrigo Ramos e Cecilio Pimentel

**Resumo** - Apresentaremos neste artigo um método analítico para avaliar o desempenho de códigos de bloco em canais de comunicações que apresentam erros em surtos. O efeito da aplicação de um entrelaçador será explicitamente estudado, bem como será investigado o dimensionamento do nível ótimo de entrelaçamento. Mostraremos as condições em que o entrelaçamento é benéfico ou prejudicial ao sistema. Será demonstrado que, para aplicações com restrição severa em relação ao atraso na transmissão, o entrelaçamento é mais eficiente para códigos com comprimento pequeno.

**Palavras-chave:** Enumeração de seqüências, códigos de bloco, entrelaçamento, canais de estados finitos.

**Abstract** - This paper presents an enumerative method to evaluate analytically the performance of block codes on channels with memory. The effect of interleaving with finite interleaving depth is explicitly studied. We identify the conditions under which the interleaving is beneficial or harmful to the system. In applications with severe delay constraint, it is demonstrated that the interleaver works better for a code with smaller block length. These analysis allow us to evaluate the tradeoff between the code rate and the interleaving depth to obtain a certain performance.

**Keywords:** Enumeration of discrete sequences, block codes, interleaving, finite state channels, Gilbert-Elliott channels.

## 1. INTRODUÇÃO

Em vários sistemas de comunicações digitais, como por exemplo sistemas móveis, as distorções causadas pelo canal de comunicações tendem a introduzir erros na seqüência transmitida, de tal forma que os erros são agrupados em surtos. Devido à dependência estatística entre estes dígitos de erro, estes canais são ditos serem canais com memória.

Uma família importante de modelos matemáticos usados para caracterizar as seqüências de erros em surtos é denominada de canais de estados finitos (CEF) [1]. Por exemplo, modelos CEF que caracterizam canais de comunicações móveis são descritos em [2, 3]. A garantia de confiabilidade nas transmissões através destes modelos depende fortemente do código corretor de erro usado.

Códigos projetados para corrigir erros aleatórios são amplamente difundidos na literatura, embora a presença de erros em surtos comprometa seu desempenho. Uma maneira de estabilizar a atuação destes códigos em canais com erros em surtos é a utilização de uma técnica chamada entrelaçamento, que tem o efeito de tornar os símbolos de erro menos dependentes, de tal forma a aumentar a efetividade do código. Um parâmetro importante desta técnica é o nível de entrelaçamento  $I_d$ , que é definido como o comprimento menos um do menor surto que pode atingir uma palavra do código duas vezes [4]. O mínimo valor de  $I_d$  que torna o canal sem memória é considerado um nível de entrelaçamento ideal se não houver restrições de atraso na decodificação da mensagem. Entretanto, em várias situações de interesse prático [5], existe um limite máximo admitido para o atraso e, conseqüentemente, para o valor de  $I_d$ , visto que níveis muito elevados incorrem em aumento excessivo de memória e atraso na decodificação requeridos para sua implementação. Portanto, nem sempre é possível eliminar totalmente a memória do canal com o uso do entrelaçamento, mas se consegue reduzir consideravelmente o efeito do surto de erros.

A idéia principal deste artigo é avaliar o desempenho de códigos de bloco binários, especificamente códigos BCH, para transmissão em canais caracterizados por modelos CEF com um número arbitrário de estados. Uma ferramenta matemática que permite analisar códigos de blocos em modelos CEF sem entrelaçamento foi desenvolvida em [6]. Este artigo visa estender os resultados obtidos em [6], procurando avaliar os possíveis ganhos obtidos ao se aplicar o entrelaçamento com nível finito. Desenvolveremos uma fórmula recursiva inédita para determinar o valor da probabilidade de ocorrerem  $m$  erros em um bloco de comprimento  $n$  para o cascadeamento do código, do entrelaçamento e de um modelo CEF. Para um modelo CEF particular, denominado de canal Gilbert-Elliott (CGE), será avaliado o compromisso entre os parâmetros do código e o nível de entrelaçamento, para se obter um certo nível de desempenho.

Este trabalho está organizado em cinco seções. Na Seção 2, será descrito o sistema de comunicações a ser analisado e algumas propriedades de modelos CEF. Um método enumerativo é apresentado na Seção 3 para obtenção de probabilidades de eventos de erros produzidos por modelos CEF. Na Seção 4, analisaremos os desempenhos de códigos BCH em modelos CEF em presença de entrelaçamento não ideal. As conclusões deste trabalho serão apresentadas na Seção 5.

---

Rodrigo Ramos é aluno de doutorado da Universidade Estadual de Campinas. Cecilio Pimentel é professor do Departamento de Eletrônica e Sistemas da Universidade Federal de Pernambuco. E-mails: rramos@decom.fee.unicamp.br, cecilio@ufpe.br. Editor de Área responsável: Renato Baldini Filho. Artigo submetido em 22/Out/2001, revisado em 18/Jun/2002, aceito em 28/Jun/2002.

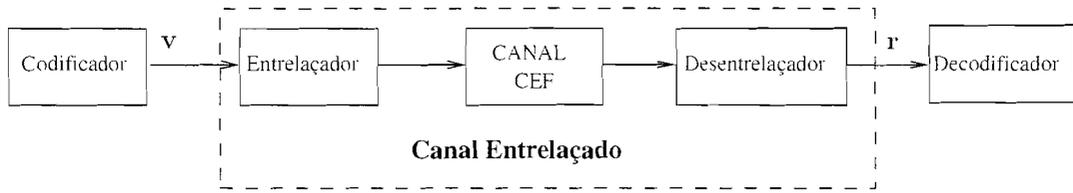


Figura 1. Diagrama em blocos de um sistema de comunicações com entrelaçamento.

## 2. DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE COMUNICAÇÕES

Consideramos o esquema de um sistema de comunicações codificado conforme ilustrado na Figura 1. Utilizamos códigos BCH primitivos binários  $(n, k)$ , cujas palavras-código têm comprimento  $n = 2^m - 1$ , onde  $m$  é um inteiro positivo, com  $k$  dígitos de informação e capacidade de correção denotada por  $t$ . A saída do codificador é uma palavra-código binária  $\mathbf{v} = (v_1 v_2 \dots v_n)$ . Assumimos um entrelaçamento de bloco, que consiste de um arranjo matricial com  $n$  colunas (comprimento do código) e  $I_d$  linhas (nível de entrelaçamento), onde cada elemento da matriz armazena um dígito binário. Os dígitos são escritos no entrelaçador no sentido das linhas e lidos no sentido das colunas. A seqüência de dígitos na saída do entrelaçador é transmitida através do canal. Os efeitos de ruídos, desvanecimento e outras interferências produzidos pelo canal são modelados como uma seqüência de erro binária aditiva  $\mathbf{e} = (e_1 e_2 \dots e_n)$ , modelada estatisticamente por um modelo CEF. Os símbolos provenientes do canal são escritos no desentrelaçador em colunas e são lidos em linhas.

A Tabela 1 mostra um exemplo de um bloco desentrelaçador, onde utilizamos quatro palavras-código ( $I_d = 4$ ) de comprimento 3. Representamos cada palavra-código por  $\mathbf{v}^i = (v_1^i v_2^i v_3^i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . A seqüência de erros proveniente do canal é espalhada entre palavras-código, como mostra a Tabela 1. A  $i$ -ésima linha do desentrelaçador é a  $i$ -ésima seqüência recebida  $\mathbf{r}^i = (r_1^i r_2^i r_3^i)$ , onde  $r_j^i = v_j^i + e_{i+(j-1)I_d}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , com adição sobre  $GF(2)$ . É importante notar que os dígitos consecutivos de uma palavra-código são corrompidos por dígitos de erro separados por uma distância  $I_d$ . Nota-se ainda que os símbolos produzidos pelo canal nos intervalos compreendidos entre dois símbolos de erro de uma mesma linha do desentrelaçador são irrelevantes para a decodificação. O bloco em cascata composto pelo entrelaçador, pelo canal CEF e pelo desentrelaçador é denominado de *canal entrelaçado*.

$v_1^1 + e_1$	$v_2^1 + e_5$	$v_3^1 + e_9$
$v_1^2 + e_2$	$v_2^2 + e_6$	$v_3^2 + e_{10}$
$v_1^3 + e_3$	$v_2^3 + e_7$	$v_3^3 + e_{11}$
$v_1^4 + e_4$	$v_2^4 + e_8$	$v_3^4 + e_{12}$

Tabela 1. Bloco desentrelaçador com nível de entrelaçamento 4 e comprimento 3.

Consideramos modelos CEF que contenham seqüências de erros geradas da seguinte forma. Seja uma cadeia de Markov  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ , estacionária, com um espaço de estados com  $N$  elementos,  $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ . No  $k$ -ésimo intervalo, a cadeia transiciona do estado  $S_{k-1} = i$  para o estado  $S_k = j$ , com probabilidade  $p_{i,j} = P(S_k = j | S_{k-1} = i)$ , e gera um símbolo binário  $\epsilon_k$ , independente de  $i$  e dos símbolos de erro vizinhos, com probabilidade  $b_{j,\epsilon_k} = P(E_k = \epsilon_k | S_k = j)$ . Definimos duas matrizes  $\mathbf{P}(e_k)$ ,  $e_k \in \{0, 1\}$ , cujos  $(i, j)$ -ésimos elementos são  $b_{j,\epsilon_k} p_{i,j}$ , isto é, cada elemento de  $\mathbf{P}(e_k)$  é a probabilidade da cadeia transicionar do estado  $i$  para o estado  $j$  e gerar um símbolo de erro  $\epsilon_k$ , para  $0 \leq i, j \leq N-1$ . Seja  $\mathbf{e}_n = (e_1 e_2 \dots e_n)$  uma seqüência de erros de comprimento  $n$ . Então o modelo CEF é completamente especificado pela probabilidade da seqüência  $\mathbf{e}_n$ , dada por

$$P(\mathbf{e}_n) = \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(e_k) \right) \mathbf{1}, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{1}$  é um vetor coluna  $N \times 1$  com todos os elementos iguais a 1 e  $\mathbf{\Pi}$  é um vetor coluna  $N \times 1$  de probabilidades estacionárias. Um exemplo de um importante modelo CEF é o modelo CGE, que consiste de uma cadeia de Markov com dois estados, como mostrado na Fig. 2. Quando a cadeia se encontra no estado 0, o símbolo  $e_k$  é igual a um (erro) com probabilidade  $g$ , ou zero (sem erro) com probabilidade  $1 - g$ . Quando a cadeia se encontra no estado 1, o símbolo  $e_k$  é igual a um com probabilidade  $b$ , ou zero com probabilidade  $1 - b$ . Desta forma,  $b_{0,1} = g$  e  $b_{1,1} = b$ . Por definição,  $g < b$ , e por isso os estados 0 e 1 são chamados de estado "bom" e estado "ruim", respectivamente. O modelo CGE é especificado pelas seguintes matrizes

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-Q & Q \\ q & 1-q \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} (1-Q)(1-g) & Q(1-b) \\ q(1-g) & (1-q)(1-b) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} (1-Q)g & Qb \\ qg & (1-q)b \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{\Pi} = [\pi_0 \quad \pi_1]^T = \left[ \frac{q}{Q+q} \quad \frac{Q}{Q+q} \right]^T, \quad (5)$$

onde  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1)$  é a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov. Definimos  $P(1) = P(E_k = 1) = \frac{1}{1+\frac{1}{\rho}}g + \frac{1}{1+\rho}b$  como sendo a probabilidade do modelo CGE gerar um erro, onde  $\rho = q/Q$ . Um parâmetro importante na análise de desempenho de canais com memória é o comprimento médio do surto  $\lambda$ , que definimos como  $\lambda = 1/q$ .

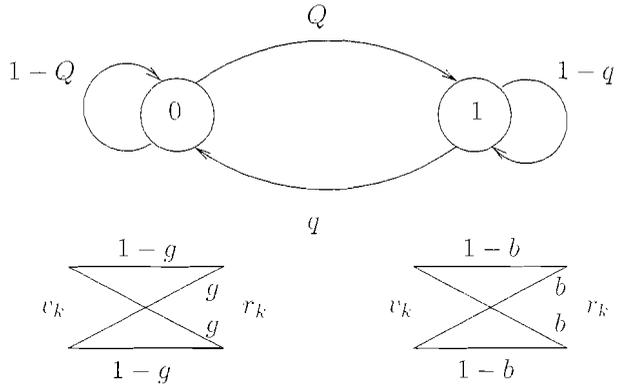


Figura 2. Modelo Gilbert-Elliott para canais com memória.

### 3. ENUMERAÇÃO DA SEQÜÊNCIA DE ERRO DO CANAL ENTRELÇADO

Desenvolveremos nesta seção uma expressão para a probabilidade de uma seqüência de erros de comprimento  $n$  na  $i$ -ésima linha do desentrelaçador.  $P(e_i e_{i+I_d} \dots e_{i+(n-1)I_d})$ . Para isso, precisamos definir algumas notações. Seja  $\mathbb{R}$  o corpo dos números reais. Definimos  $\mathbb{R} \ll x_0, x_1 \gg$  como o anel de série de potências com indeterminantes  $x_0$  e  $x_1$  não comutativos, com coeficientes em  $\mathbb{R}$ . Sejam  $s$  e  $z$  indeterminantes comutativos. Definimos  $[s^m z^n]P(s, z)$  como o coeficiente de  $s^m z^n$  da série de potências  $P(s, z)$ .

A formulação matemática seguida para o cálculo desta probabilidade está descrita em [6] e envolve dois passos:

1. Dado um conjunto de seqüências binárias de comprimento  $n$ ,  $\mathcal{E}_n$ , forma-se uma série geradora da seguinte forma

$$F_{\mathcal{E}_n} = \sum_{e_n \in \mathcal{E}_n} x_{e_1} x_{e_2} \dots x_{e_n} \in \mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle.$$

onde  $x_{e_i} \in \{x_0, x_1\}$  e os indeterminantes  $x_0$  e  $x_1$  marcam um dígito de erro  $e_k$  igual a 0 ou 1, respectivamente, em cada seqüência pertencente a  $\mathcal{E}_n$ .  $\mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle$  é o conjunto de todas as somas finitas de produtos não-comutativos de  $x_0$  e  $x_1$ , com coeficientes tomados em  $\mathbb{R}$ .

2. A probabilidade do conjunto  $\mathcal{E}_n$  será expressa na forma

$$P(\mathcal{E}_n) = \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{E}_n}) \mathbf{1}. \quad (6)$$

onde  $\Delta$  é um mapa que substitui em  $F_{\mathcal{E}_n}$  cada  $x_{e_i}$  por  $\mathbf{P}(e_i)$  [6].

Definimos a seqüência  $e'_n = (e'_i e'_{i+1} \dots e'_{i+n-1}) = (e_i e_{i+I_d} \dots e_{i+(n-1)I_d})$  como uma seqüência de erro de comprimento  $n$  produzida pelo canal entrelaçado com nível de entrelaçamento  $I_d$ . Dada uma seqüência  $e'_n$  específica, definimos um conjunto  $\mathcal{X}_n^i$  formado pela inserção do conjunto formado por todas as seqüências binárias de comprimento  $I_d$ , denotado por  $\mathcal{E}_{I_d-1}^*$ , entre cada dígito da seqüência  $e'_n$ , ou seja,

$$\mathcal{X}_n^i = \{\mathcal{E}_{I_d-1}^* e_i \mathcal{E}_{I_d-1}^* e_{i+I_d} \dots \mathcal{E}_{I_d-1}^* e_{i+(n-1)I_d}\}.$$

É importante salientar que o primeiro conjunto  $\mathcal{E}_{I_d-1}^*$  foi incluído por conveniência. Nota-se que a probabilidade de ocorrência da seqüência  $e'_n$  é igual à probabilidade de ocorrência do conjunto  $\mathcal{X}_n^i$ , isto é

$$\begin{aligned} P(e'_i e'_{i+1} \dots e'_{i+n-1}) &= P(e_i e_{i+I_d} \dots e_{i+(n-1)I_d}) \\ &= P(\mathcal{X}_n^i). \end{aligned}$$

Definimos uma série geradora para o conjunto  $\mathcal{X}_n^i$ :

$$F_{\mathcal{X}_n^i} = F_{\mathcal{E}_{I_d-1}^*} x_{e_i} F_{\mathcal{E}_{I_d-1}^*} x_{e_{i+I_d}} \dots F_{\mathcal{E}_{I_d-1}^*} x_{e_{i+(n-1)I_d}}.$$

onde  $F_{\mathcal{E}_{I_d-1}^*} = (x_0 + x_1)^{I_d-1}$  é a série geradora do conjunto  $\mathcal{E}_{I_d-1}^*$ . Utilizando (6), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} P(e_i e_{i+I_d} \dots e_{i+(n-1)I_d}) &= \\ &= \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_n^i}) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=0}^{n-1} \Delta (x_0 + x_1)^{I_d-1} x_{e_{i+kI_d}} \right) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=0}^{n-1} \{\mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1)\}^{I_d-1} \mathbf{P}(e_{i+kI_d}) \right) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^{I_d-1} \mathbf{P}(e_{i+kI_d}) \right) \mathbf{1}. \quad (7) \end{aligned}$$

A seguir, determinaremos a probabilidade de um modelo CEF entrelaçado, com nível de entrelaçamento  $I_d$ , gerar  $m$  dígitos errados em uma palavra recebida de comprimento  $n$ , denotada por  $P^{I_d}(m, n)$ . Achar esta probabilidade é trivial para um canal binário simétrico sem memória, com probabilidade de transição igual a  $p$ . Esta probabilidade é igual a  $P_{BSC}(m, n, p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$ .

Seja o conjunto  $\mathcal{X}_n^m$  a união de todos os conjuntos  $\mathcal{X}_n^i$ , no qual o peso de Hamming da seqüência  $e'_n$  produzida pelo canal entrelaçado é igual a  $m$ . Portanto, podemos observar que  $P^{I_d}(m, n) = P(\mathcal{X}_n^m)$ . Assim, podemos determinar  $P^{I_d}(m, n)$  calculando inicialmente uma expressão para a série geradora de  $\mathcal{X}_n^m$  e utilizar a mesma idéia contida em (6), isto é

$$P^{I_d}(m, n) = \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_n^m}) \mathbf{1}. \quad (8)$$

Definimos o conjunto  $\mathcal{X}_n^*$  como a união de todos os possíveis conjuntos  $\mathcal{X}_n^i$  para todas as seqüências produzidas pelo canal entrelaçado. Se definirmos  $\mathcal{X}^*$  como a união de todos os conjuntos  $\mathcal{X}_n^*$  para todos os valores de  $n$ , isto é,  $\mathcal{X}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_n^*$ , então sua série geradora é dada por

$$F_{\mathcal{X}^*} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\mathcal{X}_n^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( F_{\mathcal{E}_{I_d-1}^*} x_0 + F_{\mathcal{E}_{I_d-1}^*} x_1 \right)^n.$$

ou reescrevendo

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{X}^*} &= \left( \mathbf{1} - ((x_0 + x_1)^{I_d-1} x_0 + (x_0 + x_1)^{I_d-1} x_1) \right)^{-1} \\ &\in \mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Para que possamos enumerar o peso de Hamming e o comprimento de cada seqüência em  $F_{\mathcal{X}^*}$ , definimos a seguinte série

geradora

$$\begin{aligned}
 F^{L_d}(x_0, x_1, s, z) &= \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i (F_{\mathcal{E}_{i,d-1}} x_0 + s F_{\mathcal{E}_{i,d-1}} x_1)^i \\
 &= \left( 1 - z((x_0 + x_1)^{L_d-1} x_0 + s(x_0 + x_1)^{L_d-1} x_1) \right)^{-1} \\
 &\in \mathbb{R} \ll x_0, x_1 \gg [[s, z]].
 \end{aligned}$$

onde os indeterminantes  $s$  e  $z$  marcam o peso de Hamming e o comprimento de cada seqüência em  $F_{\mathcal{X}^m}$ . Desta forma, podemos observar a seguinte relação

$$F_{\mathcal{X}_n^m} = [s^m z^n] F^{L_d}(x_0, x_1, s, z) \in \mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle. \quad (9)$$

Portanto,  $F_{\mathcal{X}_n^m}$  enumera as seqüências de erros produzidas pelo canal entrelaçado com peso de Hamming  $m$  e comprimento  $n$ . A partir de (8) e (9), chegamos finalmente a

$$\begin{aligned}
 P^{L_d}(m, n) &= P(\mathcal{X}_n^m) = \\
 &= \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_n^m}) \mathbf{1} \\
 &= [s^m z^n] \mathbf{\Pi}^T (\Delta F^{L_d}(x_0, x_1, s, z)) \mathbf{1} \\
 &= [s^m z^n] \mathbf{\Pi}^T \left( \Delta (1 - z(x_0 + x_1)^{L_d-1} (x_0 + s x_1))^{-1} \right) \mathbf{1} \\
 &= [s^m z^n] \mathbf{\Pi}^T (\mathbf{I} - z \mathbf{P}^{L_d-1} \{ \mathbf{P}(0) + s \mathbf{P}(1) \})^{-1} \mathbf{1} \\
 &= [s^m z^n] \mathbf{\Pi}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{L_d-1} \{ z \mathbf{P}(0) + s z \mathbf{P}(1) \})^{-1} \mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

Do exposto acima, definimos uma série geradora  $H(s, z)$  para a probabilidade  $P^{L_d}(m, n)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 H(s, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n \\
 &= \mathbf{\Pi}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{L_d-1} \{ z \mathbf{P}(0) + s z \mathbf{P}(1) \})^{-1} \mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

A série geradora  $H(s, z)$  é uma razão de dois polinômios em  $s$  e  $z$ , uma vez que a inversa da matriz  $\mathbf{B} \triangleq \mathbf{I} - \mathbf{P}^{L_d-1} \{ z \mathbf{P}(0) + s z \mathbf{P}(1) \}$  é a razão entre a transposta da matriz dos cofatores de  $\mathbf{B}$  e seu determinante, isto é  $\mathbf{B}^{-1} = \text{cof}(\mathbf{B})^T / \det(\mathbf{B})$ . Então

$$H(s, z) = \frac{\mathbf{\Pi}^T \text{cof}(\mathbf{B})^T \mathbf{1}}{\det(\mathbf{B})} = \frac{L(s, z)}{Q(s, z)}. \quad (10)$$

A partir dos polinômios  $L(s, z)$  e  $Q(s, z)$ , podemos obter facilmente uma fórmula recursiva para  $P(m, n)$ , como será demonstrado a seguir para o caso particular de um canal CGE. Considere o cálculo da matriz  $\mathbf{B}$  para o CGE, utilizando as matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}(0)$  e  $\mathbf{P}(1)$  definidas em (2), (3) e (4), respectivamente. A partir de (10) podemos escrever

$$Q(s, z) = 1 + c_1 z + c_2 z s + c_3 z^2 + c_4 z^2 s + c_5 z^2 s^2. \quad (11)$$

$$L(s, z) = c_{0p} + c_{1p} z + c_{2p} z s. \quad (12)$$

onde os coeficientes dos polinômios  $Q(s, z)$  e  $L(s, z)$  são funções dos parâmetros do modelo CGE. Portanto

$$\begin{aligned}
 H(s, z) &= \frac{c_{0p} + c_{1p} z + c_{2p} z s}{1 + c_1 z + c_2 z s + c_3 z^2 + c_4 z^2 s + c_5 z^2 s^2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P^{L_d}(m, n) s^m z^n
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 c_{0p} + c_{1p} z + c_{2p} z s &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P^{L_d}(m, n) s^m z^n + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_1 P^{L_d}(m, n) s^m z^{n+1} + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_2 P^{L_d}(m, n) s^{m+1} z^{n+1} + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_3 P^{L_d}(m, n) s^m z^{n+2} + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_4 P^{L_d}(m, n) s^{m+1} z^{n+2} + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_5 P^{L_d}(m, n) s^{m+2} z^{n+2}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Fazendo-se uma mudança de índices em cada somatório duplo, obtemos termos apenas com potências  $s^m z^n$ , como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned}
 c_{0p} + c_{1p} z + c_{2p} z s &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P^{L_d}(m, n) s^m z^n + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} c_1 P^{L_d}(m, n-1) s^m z^n + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n c_2 P^{L_d}(m-1, n-1) s^m z^n + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} c_3 P^{L_d}(m, n-2) s^m z^n + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} c_4 P^{L_d}(m-1, n-2) s^m z^n + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n c_5 P^{L_d}(m-2, n-2) s^m z^n. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Como os três últimos somatórios duplos de (14) só têm efeito a partir de  $n = 2$ , separamos os três primeiros somatórios duplos em dois casos:  $n \leq 1$  e  $n \geq 2$ . Então

$$\begin{aligned}
 c_{0p} + c_{1p} z + c_{2p} z s &= P^{L_d}(0, 0) + P^{L_d}(0, 1) z + \\
 &+ P^{L_d}(1, 1) s z + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n P^{L_d}(m, n) s^m z^n + \\
 &+ c_1 P^{L_d}(0, 0) z + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} c_1 P^{L_d}(m, n-1) s^m z^n + \\
 &+ c_2 P^{L_d}(0, 0) s z + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n c_2 P^{L_d}(m-1, n-1) s^m z^n + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} c_3 P^{L_d}(m, n-2) s^m z^n + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} c_4 P^{L_d}(m-1, n-2) s^m z^n + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n c_5 P^{L_d}(m-2, n-2) s^m z^n. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Como  $P^{I_d}(m, n) = 0$  para  $m, n < 0$  e  $m > n$ , escrevemos um único índice para os somatórios em  $m$ , de forma que, reagrupando os termos do lado direito de (15), obtemos:

$$\begin{aligned} c_{0p} + c_{1p}z + c_{2p}zs \\ = P^{I_d}(0, 0) + \{P^{I_d}(0, 1) + c_1 P^{I_d}(0, 0)\}z + \\ + \{P^{I_d}(1, 1) + c_2 P^{I_d}(0, 0)\}sz + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \{P^{I_d}(m, n) + c_1 P^{I_d}(m, n-1) + \\ + c_2 P^{I_d}(m-1, n-1) + c_3 P^{I_d}(m, n-2) + \\ + c_4 P^{I_d}(m-1, n-2) + c_5 P^{I_d}(m-2, n-2)\} s^m z^n. \end{aligned} \quad (16)$$

Assim, igualando-se os coeficientes de mesma potência em ambos os lados de (16), encontramos

$$P^{I_d}(0, 0) = c_{0p} = 1. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} P^{I_d}(0, 1) + c_1 P^{I_d}(0, 0) &= c_{1p}, \\ P^{I_d}(0, 1) &= c_{1p} - c_1. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} P^{I_d}(1, 1) + c_2 P^{I_d}(0, 0) &= c_{2p}, \\ P^{I_d}(1, 1) &= c_{2p} - c_2. \end{aligned} \quad (19)$$

e a relação de recorrência para  $n \geq 2$  e  $0 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} P^{I_d}(m, n) + c_1 P^{I_d}(m, n-1) + \\ + c_2 P^{I_d}(m-1, n-1) + c_3 P^{I_d}(m, n-2) + \\ + c_4 P^{I_d}(m-1, n-2) + c_5 P^{I_d}(m-2, n-2) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

As condições iniciais da recorrência dadas por (17)-(19) são obtidas a partir do numerador de  $H(s, z)$  e a recorrência (20) é obtida a partir do denominador de  $H(s, z)$ . Deste modo, obtivemos uma nova fórmula de recorrência mais simples que as comumente usadas na literatura [7, 8], dada por

$$\begin{aligned} P^{I_d}(m, n) = -c_1 P^{I_d}(m, n-1) - c_2 P^{I_d}(m-1, n-1) + \\ - c_3 P^{I_d}(m, n-2) - c_4 P^{I_d}(m-1, n-2) + \\ - c_5 P^{I_d}(m-2, n-2). \end{aligned}$$

para  $n \geq 2$ ,  $0 \leq m \leq n$ , onde

$$c_1 = \frac{g}{q+Q} \{q + Q \mu^{I_d}\} - \frac{b}{q+Q} \{q \mu^{I_d} + Q\} - \mu^{I_d} - 1,$$

$$c_2 = -\frac{g}{q+Q} \{q + Q \mu^{I_d}\} - \frac{b}{q+Q} \{q \mu^{I_d} + Q\},$$

$$c_3 = (1-b)(1-g) \mu^{I_d},$$

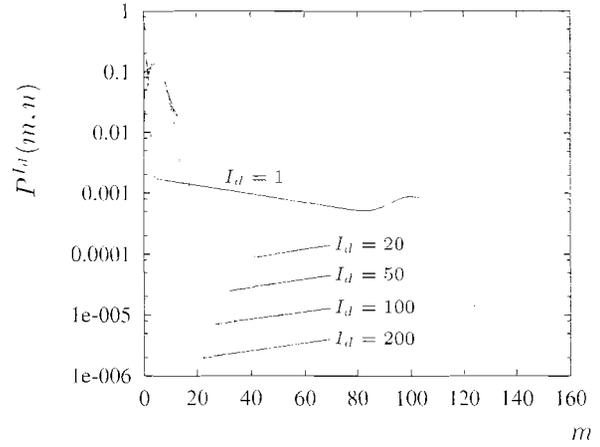
$$c_4 = (g+b-2gb) \mu^{I_d},$$

$$c_5 = bg \mu^{I_d}.$$

$\mu = 1 - q - Q$  e as condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} P^{I_d}(m, n) &= 0 \text{ para } m, n < 0, m > n. \\ P^{I_d}(0, 0) &= 1, \\ P^{I_d}(0, 1) &= \frac{g}{q+Q}(1-g) + \frac{Q}{q+Q}(1-b), \\ P^{I_d}(1, 1) &= \frac{g}{q+Q}g + \frac{Q}{q+Q}b. \end{aligned}$$

A Figura 3 ilustra o comportamento de  $P^{I_d}(m, n)$  em função de  $m$ , para o comprimento médio do surto igual a 200 e  $n = 255$ , tendo o nível de entrelaçamento como parâmetro. A figura ilustra que o aumento do nível de entrelaçamento faz com que o canal se comporte cada vez mais como um canal sem memória, devido à ação do entrelaçador.



**Figura 3.**  $P^{I_d}(m, n)$  versus  $m$ , para  $n = 255$  e  $\lambda = 200$ , tendo como parâmetro vários valores para o nível de entrelaçamento.  $I_d = 1, 50, 100, 200$ . Canal CGE com parâmetros  $\rho = 20$ ,  $\lambda = 200$ ,  $g = 0.001$ ,  $b = 0.4$ .

Mostraremos a seguir que o canal entrelaçado, que engloba o entrelaçador, o modelo CEF e o desentrelaçador, corresponde a um novo modelo CEF, cuja matriz de transições da cadeia de Markov é  $\mathbf{P}^{I_d}$ . Esta propriedade foi observada em [9], mas não conhecemos sua prova formal na literatura.

Definimos uma matriz  $\mathbf{B}(e_k)$  que satisfaz a relação  $\mathbf{P}(e_k) = \mathbf{P}\mathbf{B}(e_k)$ , onde  $\mathbf{P}$  é a matriz de transição da cadeia de Markov e  $\mathbf{B}(e_k)$  é uma matriz diagonal que depende apenas das probabilidades de erro condicionais  $b_{j,e_k}$  associadas a cada estado. Como exemplo, consideramos o modelo CGE descrito pelas matrizes  $\mathbf{P}(0)$  e  $\mathbf{P}(1)$ , definidas em (3) e (4), respectivamente. Utilizando-se esta notação, podemos escrever  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}\mathbf{B}(0)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \begin{bmatrix} (1-Q)(1-g) & Q(1-b) \\ q(1-g) & (1-q)(1-b) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-Q & Q \\ q & 1-q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-g & 0 \\ 0 & 1-b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

e de uma forma análoga  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}\mathbf{B}(1)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(1) &= \begin{bmatrix} (1-Q)g & Qb \\ qg & (1-q)b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-Q & Q \\ q & 1-q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Portanto, reescrevemos (1) na forma

$$P(e_1 e_2 \dots e_n) = \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=1}^n \mathbf{P}\mathbf{B}(e_k) \right) \mathbf{1}. \quad (23)$$

De forma análoga, a probabilidade de uma seqüência de erros de comprimento  $n$  para o canal entrelaçado dada em (7)

escreve-se

$$P(e'_i e'_{i+1} \dots e'_{i+n-1}) = \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^{I_d-1} \mathbf{P} \mathbf{B}(e'_{i+k}) \right) \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^{I_d} \mathbf{B}(e'_{i+k}) \right) \mathbf{1}.$$

Comparando (23) e (24), concluímos que o canal entrelaçado é um novo CGE, com uma nova matriz de transição  $\mathbf{P}$  elevada à potência  $I_d$ ,  $\mathbf{P}^{I_d}$ . Observe que a matriz  $\mathbf{B}(e_k)$  é igual para os casos com e sem entrelaçamento. Concluímos, portanto, que um CGE com matriz de transição  $\mathbf{P}^{I_d}$  gera seqüências de erros binárias com mesma probabilidade que um CGE entrelaçado com nível de entrelaçamento  $I_d$ . A seguir, assumiremos que a matriz  $\mathbf{P}$  é diagonalizável. Neste caso, um procedimento eficiente para o cálculo de potências de uma matriz consiste na sua diagonalização [10].

Seja  $\mathbf{S}$  uma matriz  $N \times N$ , cuja  $i$ -ésima coluna é o autovetor de  $\mathbf{P}$  correspondente ao autovalor  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Então,  $\mathbf{P}^{I_d} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{I_d} \mathbf{S}$ , onde  $\mathbf{\Lambda}^{I_d} = \text{diag}(\lambda_1^{I_d}, \lambda_2^{I_d}, \dots, \lambda_N^{I_d})$ . Por exemplo, para o modelo CGE

$$\mathbf{\Lambda}^{I_d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^{I_d} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{Q}{q} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\mathbf{P}^{I_d} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{Q}{q} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^{I_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q}{q+Q} & \frac{Q}{q+Q} \\ -\frac{q}{q+Q} & \frac{Q}{q+Q} \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{P}^{I_d} = \begin{bmatrix} \frac{q}{q+Q} + \frac{Q\mu^{I_d}}{q+Q} & \frac{Q}{q+Q} - \frac{Q\mu^{I_d}}{q+Q} \\ \frac{q}{q+Q} - \frac{q\mu^{I_d}}{q+Q} & \frac{Q}{q+Q} + \frac{q\mu^{I_d}}{q+Q} \end{bmatrix}.$$

Portanto  $\mathbf{P}^{I_d}$  é da forma

$$\mathbf{P}^{I_d} = \begin{bmatrix} 1 - Q' & Q' \\ q' & 1 - q' \end{bmatrix}, \quad (24)$$

onde

$$Q' = \frac{1}{1+\rho} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{(1+\rho)}{\lambda\rho} \right)^{I_d} \right\}, \quad (25)$$

$$q' = \frac{\rho}{1+\rho} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{(1+\rho)}{\lambda\rho} \right)^{I_d} \right\}. \quad (26)$$

Os parâmetros da cadeia de Markov do novo modelo CGE que caracteriza o modelo CGE entrelaçado com nível de entrelaçamento  $I_d$  são dados por (25) e (26). Os parâmetros  $b$ ,  $g$  e  $\rho = q'/Q' = q/Q$  são iguais ao do modelo original. O comprimento médio de um surto no canal entrelaçado é

$\lambda' = 1/q'$ . Rearrmando os termos em (26), podemos escrever

$$\lambda' = \frac{(1+\rho)/\rho}{\left[ 1 - \left( 1 - \frac{(1+\rho)}{\lambda\rho} \right)^{I_d} \right]}. \quad (27)$$

Assim, fixando-se os parâmetros  $b$ ,  $g$  e  $\rho$ , observamos claramente que o desempenho de um código operando em um modelo CGE entrelaçado com parâmetros  $\lambda$  e  $I_d$  é igual ao de um modelo CGE não entrelaçado com parâmetro  $\lambda'$ .

#### 4. ANÁLISE DE CÓDIGOS DE BLOCO EM CANAIS CGE ENTRELAÇADOS

A seguir, mostraremos resultados numéricos do desempenho de códigos BCH aplicados a modelos CGE entrelaçados. Adotaremos como medida de desempenho do sistema a probabilidade de ocorrência de mais de  $t$  erros em uma palavra recebida, denotada por  $PED$ . Seja  $P^{I_d}(m, n)$  a probabilidade de ocorrerem  $m$  erros em uma palavra recebida de comprimento  $n$  na saída do desembaralhador com nível finito  $I_d$ . Então,  $PED$  é definida por

$$PED = 1 - \sum_{m=0}^t P^{I_d}(m, n) = \sum_{m=t+1}^n P^{I_d}(m, n).$$

Nas análises realizadas a seguir, fixaremos os parâmetros do canal como  $\rho = 20$ ,  $b = 0,4$ ,  $g = 0,001$  e  $P(1) = 0,02$ , exceto quando explicitamente citado. Inicialmente, trataremos o caso de modelos sem entrelaçamento ( $I_d = 1$ ). A Figura 4 mostra o comportamento da  $PED$  em função do comprimento médio do surto  $\lambda$ , para códigos BCH (255,  $k$ ), tendo como parâmetro a capacidade de correção do código. Observamos dois comportamentos para a  $PED$ , dependendo do valor de  $t$ . Para valores pequenos de  $t$ , como por exemplo  $t = 0$  e  $t = 3$ , a  $PED$  decresce com  $\lambda$ . Neste caso, quando  $\lambda$  é pequeno, o número de erros mais prováveis está concentrado em torno da média  $n P(1)$  aproximadamente igual a 5. Porém estes erros não são corrigíveis pelos códigos com  $t$  menor que esse valor, resultando em valores elevados para a  $PED$ . Com o aumento de  $\lambda$ , estes erros vão se tornando menos prováveis, levando a uma melhoria da eficiência do código. No caso de valores mais elevados de  $t$ , isto é, para valores de  $t$  maiores que aproximadamente 5, a  $PED$  é menor em canais com  $\lambda$  pequeno, pois os erros mais prováveis destes canais são corrigíveis pelo código, ou seja, o código é eficiente. Com o aumento de  $\lambda$  até um certo valor, há uma perda de eficiência do código, pois os surtos se tornam mais longos, dificultando sua correção. É interessante observar o decaimento da  $PED$  para  $\lambda \gg n$ . Este decaimento ocorre devido ao comportamento limite de  $PED$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , fazendo com que exista um ponto de máximo. Denotaremos o valor do comprimento médio do surto correspondente a este máximo de  $\lambda_{MAX}$ . Calcularemos analiticamente este valor limite da  $PED$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$  para dois valores distintos de  $t$ , por exemplo  $t = 0$  e  $t = 32$ . Para o caso  $\lambda \gg n$ , podemos obter uma aproximação da

$PED$  para  $t = 0$ , dada por

$$\begin{aligned} PED &\simeq \pi_0 \sum_{m=t+1}^n P_{BSC}(m, n, g) + \pi_1 \sum_{m=t+1}^n P_{BSC}(m, n, b) \\ &\simeq \pi_0 \sum_{m=1}^n P_{BSC}(m, n, g) + \pi_1 \sum_{m=1}^n P_{BSC}(m, n, b) \\ &\simeq \pi_0 (1 - P_{BSC}(0, n, g)) + \pi_1 \\ &\simeq \pi_0 (1 - (1 - g)^n) + \pi_1 \\ &\simeq 1 - \pi_0 (1 - g)^n. \end{aligned}$$

onde usamos a aproximação  $\sum_{m=1}^n P_{BSC}(m, n, b) \simeq 1$ . Da mesma forma, podemos aproximar a  $PED$  para o caso  $t = 32$  (na verdade, esta aproximação é válida para os casos  $t > 2$ )

$$\begin{aligned} PED &\simeq \pi_0 \sum_{m=t+1}^n P_{BSC}(m, n, g) + \\ &\quad + \pi_1 \sum_{m=t+1}^n P_{BSC}(m, n, b) \\ &\simeq \pi_1. \end{aligned}$$

onde foram usadas as aproximações

$$\sum_{m=t+1}^n P_{BSC}(m, n, g) \simeq 0$$

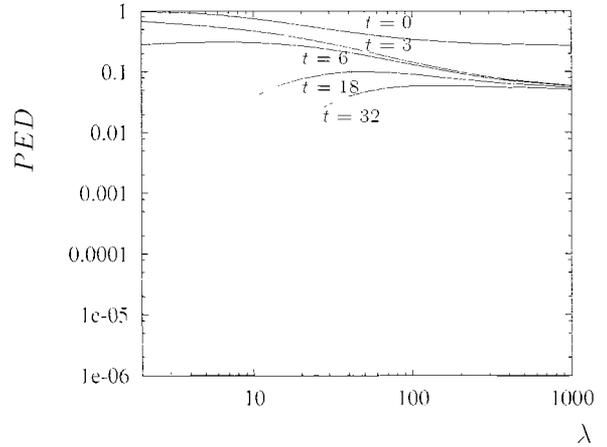
e

$$\sum_{m=t+1}^n P_{BSC}(m, n, b) = 1.$$

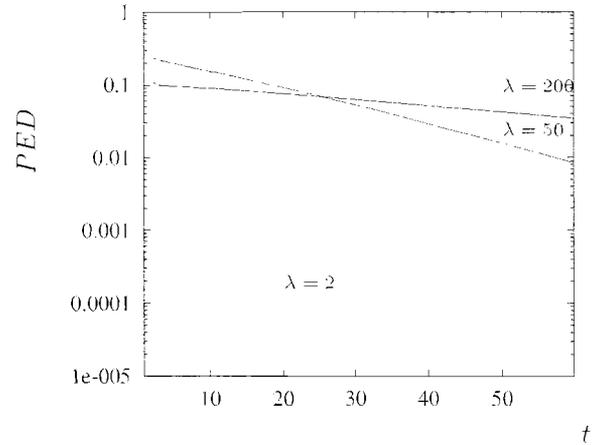
Portanto, as curvas da Figura 4 variam de  $PED = 1 - \sum_{m=0}^t P_{BSC}(m, n, P(1))$ , quando  $\lambda \rightarrow 1$ , até  $PED = \pi_1$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . A Figura 5 mostra claramente os valores de  $t$  que apresentam uma transição entre os dois comportamentos distintos da  $PED$  versus  $\lambda$ . Observamos pontos de cruzamento entre as curvas, os quais indicam os valores de  $t$  que têm este comportamento de transição.

A Figura 6 ilustra a  $PED$  versus a probabilidade de erro média  $P(1)$  introduzida pelo canal, para dois valores de  $\lambda$ ,  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 200$  e para vários valores de  $t$ . Nota-se claramente que o aumento de  $t$  tem pouca influência para  $\lambda = 200$ . Nota-se ainda que se  $P(1)$  é pequena o bastante para que o código seja eficiente, então a  $PED$  será bem menor em canais com  $\lambda$  pequeno do que em canais com  $\lambda$  maior. O motivo deste comportamento é que em canais com  $\lambda$  pequeno os erros se concentram em torno de sua média, diferentemente para o caso de valores de  $\lambda$  mais altos. Como os códigos são desenvolvidos para uma capacidade de correção fixa, ocorrem menos erros de decodificação em canais onde o número de erros é, com grande probabilidade, menor do que a capacidade de correção do código.

A seguir, mostraremos resultados numéricos do desempenho de códigos BCH aplicados a modelos CGE entrelaçados. A Figura 7 ilustra a variação da  $PED$  em função da capacidade de correção de um código BCH de comprimento  $n = 255$ , tendo  $I_d$  como parâmetro. A figura mostra que vários valores de  $t$  e  $I_d$  podem ser escolhidos para



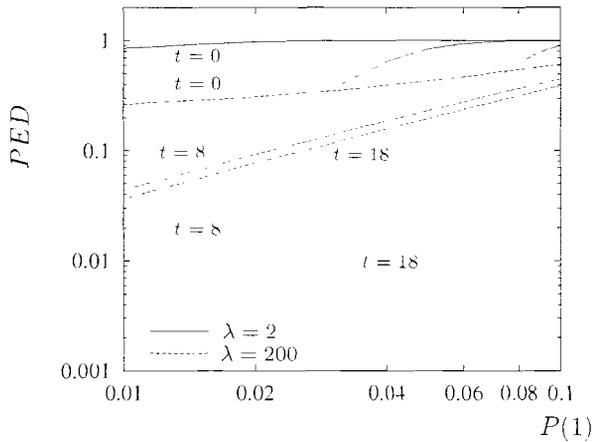
**Figura 4.** Gráfico da  $PED$  versus o comprimento médio do surto  $\lambda$ , para códigos BCH com  $n = 255$  e  $k$  variável, tendo como parâmetro cinco valores de  $t$ ,  $t = 0, 3, 6, 18$  e  $32$ . Canal CGE não entrelaçado,  $I_d = 1$ .



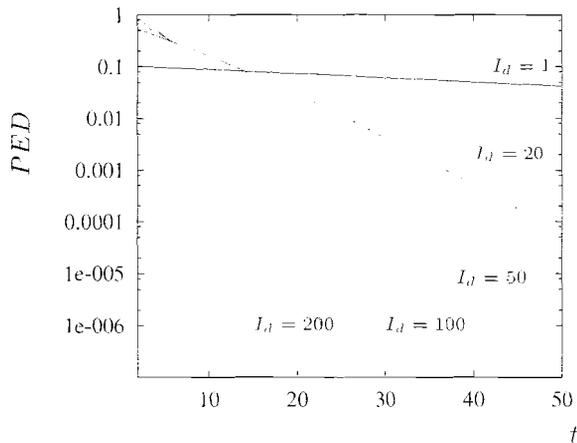
**Figura 5.** Gráfico da  $PED$  em função de  $t$ , para códigos BCH com  $n = 255$  e três valores de  $\lambda$  como parâmetro:  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 50$  e  $\lambda = 200$ . Canal CGE não entrelaçado,  $I_d = 1$ .

se obter um certo desempenho. Fixada  $PED$ , podemos optar por um entrelaçador com  $I_d$  baixo, porém a taxa do código escolhido deve ser pequena ( $t$  elevado). Por outro lado, podemos escolher um código mais simples (com valor baixo de  $t$ ), havendo um aumento do nível de entrelaçamento  $I_d$ . Portanto, usando as ferramentas desenvolvidas nesta seção, pode-se avaliar o compromisso entre a taxa do código e o valor do nível de entrelaçamento.

A Figura 8 mostra o comportamento da  $PED$  versus  $\lambda$ , para vários valores de  $I_d$ , para códigos BCH com comprimento  $n = 255$  e capacidade de correção  $t = 4$  e  $t = 18$ . Podemos observar dois comportamentos distintos das curvas com relação à capacidade de correção dos códigos. Quando o valor de  $t$  está abaixo do valor médio do número de erros observado para valores de  $\lambda$  pequenos,  $\bar{m} = n P(1)$  (por exemplo,  $t \leq 5$  para  $n = 255$ ) o uso do entrelaçamento é prejudicial ao sistema. Para valores de  $t$  maiores, observamos o efeito benéfico do entrelaçamento, devido ao espalhamento dos erros entre palavras do código, facilitando sua atuação. O



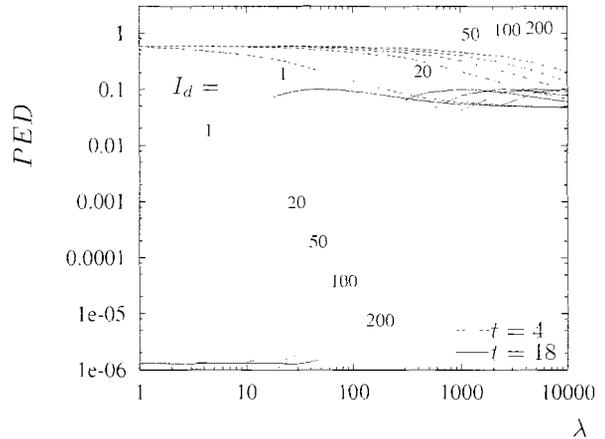
**Figura 6.** Gráfico da  $PED$  versus a probabilidade média de erro  $P(1)$ , tendo como parâmetros  $\lambda = 2$  (linha sólida) e  $\lambda = 200$  (linha tracejada) e três valores de  $t$ :  $t = 0, 8$  e  $18$ . Canal CGE não entrelaçado,  $I_d = 1$



**Figura 7.** Gráfico da  $PED$  em função da capacidade de correção  $t$  de um código BCH de comprimento  $n = 255$ , tendo como parâmetro  $I_d$ . Canal CGE entrelaçado.

valor de  $t = 6$  para  $n = 255$  seria uma curva de transição entre estes dois comportamentos. Como o desempenho de um código em um canal CGE entrelaçado com parâmetros  $\lambda$  e  $I_d$  é igual ao desempenho em um canal CGE não entrelaçado com parâmetro  $\lambda'$ , dado em (27), podemos explicar o efeito prejudicial ou não do entrelaçamento, dependendo da capacidade de correção do código utilizado. Como exemplo, fixemos  $\lambda = 1000$  e  $\rho = 20$ . Para  $I_d = 1, I_d = 50$  e  $I_d = 200$ , obtemos, respectivamente,  $\lambda' = 1000, \lambda' \simeq 21$  e  $\lambda' \simeq 6$ . Se acompanharmos a variação da  $PED$  do canal CGE não entrelaçado da Figura 4 com a diminuição de  $\lambda$  (que pode ser interpretado como  $\lambda'$ ), observamos que a  $PED$  cresce com a diminuição de  $\lambda'$  (ou equivalentemente com o aumento de  $I_d$ ) até o valor  $\lambda_{MAX}$ , a partir do qual há uma diminuição da  $PED$ . Como  $\lambda_{MAX} \simeq 0$  para o caso  $t = 3$ , que é similar ao caso  $t = 4$ , a  $PED$  é monotonicamente crescente com o aumento de  $I_d$ , ou seja, o entrelaçamento é sempre prejudicial. Quando  $t = 18$ , o entrelaçamento é benéfico quando  $\lambda' < 40$ , ou  $I_d > 25$ . Portanto, concluímos que o entrelaçamento é

prejudicial para os valores de  $I_d$  em que  $\lambda' > \lambda_{MAX}$ . Isto explica porque o entrelaçamento é benéfico ou não, dependendo do valor de  $t$ . Portanto, o entrelaçamento é benéfico para os casos em que  $t > nP(1)$  e  $\lambda' < \lambda_{MAX}$ .

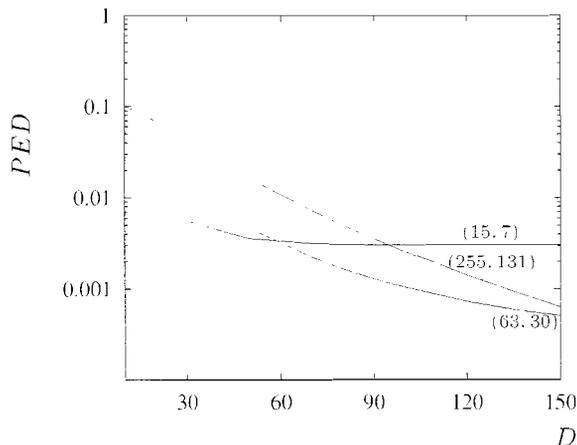


**Figura 8.**  $PED$  em função do comprimento médio do surto  $\lambda$ , com o nível de entrelaçamento  $I_d$  como parâmetro, para dois códigos BCH, (255,223)  $t = 4$  (linha tracejada) e (255,131)  $t = 18$  (linha sólida).  $I_d = 1, 20, 50, 100, 200$ .

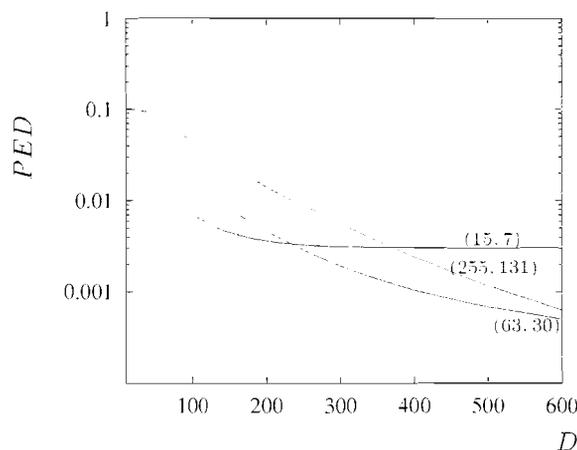
Na maioria dos trabalhos publicados, assume-se um nível de entrelaçamento perfeito ( $I_d \rightarrow \infty$ ), o que pode levar a um valor de atraso não aceitável em sistemas que tenham restrições quanto a este parâmetro [6]. Iremos observar a seguir o desempenho de sistemas com restrição severa de atraso. Consideramos  $C$  a taxa de transmissão da informação em bits/segundos. Um dígito binário a ser transmitido sofre um atraso devido ao entrelaçamento de  $D = 2n I_d / C$  segundos, ou seja, fixado um certo valor de  $D$ , o máximo nível de entrelaçamento permitido com o uso de códigos de bloco é dado por  $I_d = \lfloor DC / (2n) \rfloor$ . Portanto, fixando-se um valor de atraso e uma dada taxa do código BCH, existe um compromisso entre sua capacidade de correção e o nível de entrelaçamento, visto que o aumento de  $t$  implica em um aumento do comprimento do mesmo, e conseqüentemente, o nível de entrelaçamento deve ser reduzido.

As Figuras 9 e 10 ilustram o comportamento da  $PED$  em função do atraso  $D$  (ms), para  $\lambda = 50$  e  $\lambda = 200$ , respectivamente, para três códigos BCH de taxa  $R_c = k/n$  aproximadamente igual a 0,5, com parâmetros (15,7), (63,30) e (255,131) e capacidade de correção  $t = 2, t = 6$  e  $t = 18$ , respectivamente. Consideramos uma transmissão com taxa  $C = 100$  kbps. Podemos observar pontos de cruzamento nos gráficos, que indicam uma transição do comportamento do código com relação ao atraso. Por exemplo, as curvas da Figura 9 indicam que o código (15,7) apresenta o melhor desempenho se o atraso requerido é inferior a 60 ms. Os gráficos mostram que em situações com restrições severas de atraso, o desempenho de códigos com maior capacidade de correção é severamente degradado, tornando-se inferior ao desempenho de um código mais simples. Entretanto, para valores mais altos de atraso, os códigos (63,30) e (255,131) têm um desempenho superior ao código (15,7), o que era intuitivamente esperado. Novamente, podemos explicar estes comportamentos com o seguinte argumento. Se fixarmos um

valor para o atraso, por exemplo  $D = 120$  ms, obtemos para os códigos com  $n = 255$  e  $n = 63$ , respectivamente,  $I_d = 24$  ( $\lambda' \simeq 2.6$ ) e  $I_d = 96$  ( $\lambda' \simeq 1.2$ ). Observando os valores da  $PED$  no gráfico da Figura 8 para os valores  $I_d = 1$  e  $\lambda' = 1.2$  concluímos que o menor valor de  $\lambda'$ , que corresponde ao código com  $n = 63$ , tem o melhor desempenho. Análises do comportamento da  $PED$  versus o atraso para modelos CEF podem ser encontradas em [11, 12], porém estas referências utilizam ferramentas matemáticas diferentes das desenvolvidas neste trabalho.



**Figura 9.** Gráfico da  $PED$  em função do atraso  $D$  em milissegundos, para uma taxa de transmissão  $C = 100$  kbps, tendo como parâmetros três códigos distintos, para  $\lambda = 50$ .



**Figura 10.** Gráfico da  $PED$  em função do atraso  $D$  em milissegundos, para uma taxa de transmissão  $C = 100$  kbps, tendo como parâmetros três códigos distintos, para  $\lambda = 200$ .

## 5. CONCLUSÕES

Neste artigo, exploramos as propriedades de canais de estados finitos utilizados para modelar canais reais que têm como característica a ocorrência de erros em surto. Desenvolvemos ferramentas matemáticas para analisar o desempenho dos modelos CEF, utilizando como critério a probabilidade de erro após a decodificação.

Obtivemos uma nova fórmula recursiva para  $P^{I_d}(m, n)$  em canais entrelaçados, ilustrando numericamente o ganho de desempenho de códigos BCH com a aplicação do entrelaçamento. Demonstramos que um modelo CEF entrelaçado com matriz de transição  $\mathbf{P}$  é um novo CEF, com uma nova matriz de transição  $\mathbf{P}$  elevada à potência  $I_d$ ,  $\mathbf{P}^{I_d}$ . Observamos que, fixando-se os parâmetros  $b$ ,  $g$  e  $\rho$ , o desempenho de um código operando em um modelo CGE entrelaçado com parâmetros  $\lambda$  e  $I_d$  é igual ao de um canal não entrelaçado ( $I_d = 1$ ) que tenha como parâmetro  $\lambda'$ . Avaliamos numericamente o desempenho de códigos BCH entrelaçados e mostramos que existe um compromisso entre a taxa do código e o valor do nível de entrelaçamento. Concluímos a partir das análises que o entrelaçamento é benéfico para os casos em que  $t > nP(1)$  e  $\lambda' < \lambda_{MAX}$ .

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho recebeu apoio parcial do Conselho Nacional para o Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), No. 300987/96-0.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. N. Kanal e A. R. K. Sastry, "Models for channels with memory and their applications to error control", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 66, pp. 724-744, July 1978.
- [2] Jean-Yves Chouinard, M. LeCours e G. Y. DeLisle, "Estimation of Gilbert's and Fritchman's models parameters using the gradient method for digital mobile radio channels", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 37, pp. 158-166, Aug. 1988.
- [3] F. Swarts and H. C. Ferreira, "Markov characterization of digital fading mobile VHF channels", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 43, pp. 977-985, Nov. 1994.
- [4] "Interleaved coding for bursts channels", Cyclotomics' Final Report on Phase I, Small Business Innovation Research, NSF Grant No. ECS-8260180, Abr. 1983.
- [5] H. Bischl e E. Lutz, "Packet error rate in the non-interleaved Rayleigh channel", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 43, pp. 1375-1382, Abr. 1995.
- [6] Cecilio Pimentel, "Generating series for error statistics of block codes on channels with memory", *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, Vol. 13, pp. 74-82, Dez. 1998.
- [7] E. Elliott, "Estimates of error rates for codes on burst-noise channels", *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 42, pp. 1977-1997, Sept. 1963.
- [8] G. Sharma, A. Hassan, A. Dholakia, "Performance evaluation of burst-error-correcting codes on a Gilbert-Elliott channel", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 46, pp. 846-849, July 1998.
- [9] S. Tsai and P. Schmied, "Interleaving and error-burst distribution", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 20, pp. 291-296, June 1972.
- [10] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, Inc., 1976.
- [11] L. Wilhelmsson e L. B. Milstein, "On the effect of imperfect interleaving for the Gilbert-Elliott channel", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 47, pp. 681-688, May 1999.
- [12] M. Zorzi, "Performance of FEC and ARQ error control in bursty channels under delay constraints", *Proc. VTC'98*, pp. 18-21, May 1998.

**Rodrigo Ramos** graduou-se em Engenharia Eletrônica pela Universidade de Pernambuco (UPE), Recife, Brasil, em 1997, e recebeu o grau de Mestre pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Brasil, em 2001. Atualmente, é aluno de doutorado da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo. Seus interesses de pesquisa incluem canais de estados finitos, CDMA, arranjo de antenas e códigos espaço-temporais.

**Cecilio Pimentel** nasceu em Recife em 07 de junho de 1966. Graduou-se em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Pernambuco em 1987. Recebeu o título de Mestre em Engenharia Elétrica pelo Centro de Estudos em Telecomunicações da Universidade Católica do Rio de Janeiro em 1990 e o título de doutor em Engenharia Elétrica pela University of Waterloo, Canadá, em 1996. Desde 1998 é professor do Departamento de Eletrônica e Sistemas da Universidade Federal de Pernambuco. Seus principais interesses em pesquisa são teoria da informação, dinâmica simbólica, teoria das comunicações. Em 1999, Dr. Pimentel recebeu o prêmio Santista juventude em telecomunicações.