

Melhor Estimativa da Posição de um Ponto Emissor no Espaço M-Dimensional e Determinação dos Domínios Ótimos de Busca

Jack Baczynski

Implementa-se neste trabalho a solução para a melhor estimativa da posição de um ponto emissor no espaço m-dimensional, a partir das observações das trajetórias de propagação - sujeitas a erro, geradas a partir deste ponto. A solução, analítica e matricial, é desenvolvida a partir do Teste de Hipóteses de Máxima Verossimilhança (THMV) quando se considera um campo contínuo m-dimensional de hipóteses. Determina-se ainda as densidades de probabilidade da posição do ponto emissor em um espaço m-dimensional, bem como os volumes ótimos de detecção e busca associados às probabilidades (P) de acerto exigidas. Os resultados finais aplicam-se diretamente aos problemas de detecção e localização por sistemas MAGE e Radiogoniometria assim como aos problemas de detecção e busca a plataformas e objetos submersos acústica ou eletromagneticamente ativos.

The best estimate of the position of an emitting point located in the m-dimensional space and conditional to the observation of the emitting point's propagation trajectories - added to gaussian distortion, is obtained. The analytical and matrix form solution developed is based on the implementation of the Maximum Likelihood Hypothesis Testing as one considers a continuous m-dimensional field of hypothesis. Referring to the position of the emitting point in the m-dimensional space, gaussian conditional probability densities are derived. The optimum detection/search domains are also implemented, as functions of the required probabilities (P) of detection or success. The results directly apply to the radio direction finding problem, electronic support measures (ESM) problem and search for submersed emitting objects.

1. Introdução

Um problema clássico na área naval, particularmente nas aplicações militares, é o de localização e busca de um ponto emissor no espaço bidimensional, onde se observa as posições das trajetórias de propagação geradas pelo ponto, às quais estão agregadas componentes aleatórias de erro⁽³⁾.

Um exemplo são as Redes de Radiogoniometria cujas estações de rastreamento procuram "marcar" um ponto emissor - um navio ou plataforma transmitindo. Nesse caso, as observações "posição da trajetória de propagação" resultam da informação de ângulo de marcação - agregada a erro - capturada por cada estação de rastreamento de posição precisamente conhecida^{(9),(7)}. Outro exemplo são os sistemas MAGE (Medidas de Apoio à Guerra Eletrônica).

O problema, considerando apenas o aspecto de localização, é tratado também em [1], onde é apresentada uma solução matricial ao problema e onde é possível a introdução das correlações, porventura existentes, entre os deslocamentos aleatórios das trajetórias.

Neste trabalho é feita uma generalização do problema de localização e busca ao caso m-dimensional, através de um novo tratamento matricial e mantendo-se a abrangência ao caso onde existam correlações entre os deslocamentos aleatórios das trajetórias.

O problema de localização se refere à obtenção da melhor estimativa da posição do ponto emissor dadas as observações das trajetórias de propagação e é tomado, tanto em [1], [3] e neste trabalho, com base no critério de máxima verossimilhança.

O problema de busca refere-se a obtenção dos volumes ótimos de detecção e busca, ou seja, aquele que, para uma dada probabilidade de acerto assume dimensão mínima.

A **Fig.1** ilustra o problema para o caso tridimensional onde o efeito das componentes aleatórias de erro é o deslocamento paralelo das trajetórias a partir de suas posições originais - que passam sobre o ponto emissor.

Os problemas de localização e busca a plataformas e objetos submersos acústica ou eletromagneticamente ativos caracterizam uma aplicação ao caso tridimensional.

Considera-se, na seção 2, a solução do problema de escolha da melhor hipótese, segundo o Teste de Hipóteses de Máxima Verossimilhança - THMV^{(2),(5)}, para um campo contínuo m-dimensional de hipóteses, a partir da observação de uma variável aleatória de natureza genérica⁽¹⁾.

Na seção 3 considera-se o problema onde se observa as trajetórias de propagação provenientes de um ponto emissor localizado no espaço m-dimensional (**Fig. 1**), sobre as quais incidem componentes aleatórias gaussianas de deslocamento e obtém-se a solução analítica e matricial para a melhor estimativa da posição do ponto emissor, segundo o THMV. Implementa-se a seguir a particularização ao caso bidimensional.

A seção 4 determina a densidade de probabilidade da posição do ponto emissor em um espaço m-dimensional, bem como o volume ótimo de detecção e busca associado à uma dada probabilidade (P) de acerto exigida.

2. Teste de Hipóteses de Máxima Verossimilhança (THMV)

2.1. Conceituação

Seja v a variável aleatória (v.a) correspondente a n observações realizadas, representada pelo vetor

$$v = (v_1 \dots v_n)^T \quad (1)$$

de dimensão $(n.s) \times 1$, onde cada v.a. $v_i = 1, \dots, n$ tem dimensão s .

Seja $\{x\}$ um conjunto infinito de hipóteses definido num espaço métrico m -dimensional (\mathbb{R}^m). Definindo-se cada hipótese pela variável vetorial

$$x \triangleq (x_1 \dots x_m)^T \quad (2)$$

deseja-se escolher aquela que mais possivelmente possa ter ocorrido a partir da observação v_0 da v.a. v .

O THMV^{(2),(5)} consiste na identificação do grau de verossimilhança de cada hipótese x com as observações⁽²⁾, o que é expresso pela densidade de probabilidade de v condicionada a x , ou seja, $P_{v|x}^{(v|x)}$. A hipótese a ser escolhida é aquela que fornece a máxima verossimilhança com as observações, ou seja,

$$x^* \mid \max_x \{P_{v|x}^{(v|x)}\} \quad (3)$$

para $v = v_0$.

A estimativa x^* , determinada de acordo com o procedimento apresentado, é denominada de "melhor estimativa de x segundo o THMV".

A expressão (3) provém de uma formulação mais geral de minimização da função de risco de Bayes (ou custo total esperado)^{(2),(5)} dada por

$$x^* \mid \max_x \{C_\eta(x) \cdot P_{x|\eta}^{(x|\eta)} \cdot P_{v|x}^{(v|x)}\} \quad (4)$$

onde a densidade a priori $P_{x|\eta}^{(x|\eta)}$ corresponde à densidade de probabilidade de ocorrência da hipótese x de forma intrínseca ou sujeita ao conhecimento de outras informações (η) que não aquelas relativas a v e onde o custo do erro $C_\eta(x)$ traduz a criticidade da hipótese x , ponderando as consequências de, tendo ocorrido a hipótese x , não se ter decidido por sua escolha.

2.2. Aplicação ao Caso Gaussiano

Para o caso em que, dada a hipótese x , as observações formam um vetor Gaussiano, tem-se que

$$P_{v|x}^{(v|x)} = (2\pi)^{-m/2} |V_{v|x}|^{-1/2} \cdot e^{-(v^T \cdot V_{v|x}^{-1} \cdot v)/2} \quad (5)$$

com

$$v' \triangleq (v'_1 \dots v'_n)^T \triangleq v - E\{v|x\}, \quad (6)$$

$$E\{v|x\} = \left(E\{v_1|x\} \dots E\{v_n|x\} \right)^T \quad (7)$$

e onde a notação $|A|$ indica o determinante da matriz A .

A v.a. v' tem portanto média condicional nula e dimensão $(n.s.) \times 1$ e representa a v.a. de erro em relação à média $E\{v|x\}$.

A matriz covariância $V_{v|x}$, de dimensão $(n.s.) \times (n.s.)$, é dada por

$$\begin{aligned} V_{v|x} &= E\{(v - E\{v|x\}) \cdot (v - E\{v|x\})^T | x\} \\ &= E\{v' \cdot v'^T | x\} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} E\{v'_1 \cdot v'^T_1 | x\} & \dots & E\{v'_1 \cdot v'^T_n | x\} \\ \vdots & & \vdots \\ E\{v'_i \cdot v'^T_j | x\} & & \\ \vdots & & \vdots \\ E\{v'_n \cdot v'^T_1 | x\} & \dots & E\{v'_n \cdot v'^T_n | x\} \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde

$$E\{v'_i \cdot v'^T_j | x\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \quad (9)$$

tem dimensão $s \times s$.

Tem-se a partir de (3), (5), (6) e (8)

$$x^* | \min_x \{v'^T \cdot V_{v|x}^{-1} \cdot v'\} \quad (10)$$

$$\text{tomando-se } v' = v_0 - E\{v|x\} \quad (11)$$

As expressões (10) e (11) dão, para o caso gaussiano, a estimativa de máxima verossimilhança de $x \in R^m$, a partir da determinação da v.a. de erro v' .

3. Estimativa de Máxima Verossimilhança da Posição de um Ponto Emissor

Considera-se o espaço métrico (R^m) caracterizado por um sistema cartesiano definido por uma base vetorial (e_1, \dots, e_m) , onde se observa as trajetórias de propagação v emitidas por um ponto emissor localizado num ponto genérico x desse espaço.

Devido às componentes aleatórias de erro que incidem sobre as trajetórias, seus caminhos geométricos não passam necessariamente sobre o ponto emissor. Resulta, portanto, um problema de natureza probabilística, que é o da obtenção da melhor estimativa da posição x deste ponto, a ser implementada através do Teste de Hipóteses de Máxima Verossimilhança (THMV) apresentado na seção 2.

A Fig.1 ilustra, para o caso tridimensional, a configuração das componentes de erro de deslocamento das trajetórias de propagação e suas distribuições gaussianas, a partir da suposição do ponto emissor em x . Admite-se que a introdução da componente aleatória de erro resulta no deslocamento paralelo da reta de propagação a partir de sua posição original sobre o ponto emissor, em direções ortogonais à direção da trajetória, segundo uma distribuição gaussiana com matriz covariância conhecida. Nos casos práticos, as estações rastreadoras encontram-se longe do ponto emissor, o que justifica o modelo de deslocamento paralelo adotado. Tem-se ainda que a v.a. de observações v_i , $i = 1, \dots, n$, refere-se a v.a. "posição da trajetória de propagação i " e corresponde ao vetor tomado ortogonalmente, a partir da reta de propagação i à origem do sistema cartesiano formado pela base ortonormal $\{e_1, \dots, e_m\}$ ou a outro ponto fixo qualquer que venha a ser escolhido como referência. A v.a. de erro $v'_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ corresponde ao vetor tomado ortogonalmente, a partir da reta de propagação i ao ponto x .

Expressas numa base ortogonal à direção da trajetória, v_i e $v'_i(x)$ passam a ser completamente definidos em $m-1$ dimensões, uma vez que as componentes na direção da trajetória serão, por construção, nulas. Portanto, $s = m-1$ informações escalares bastam para caracterizar a "trajetória de propagação i " ou o erro de deslocamento.

As distribuições de v , condicionada a x , estão centradas sobre a posição da plataforma, ou seja, existe simetria na introdução das componentes aleatórias de erro. Portanto o conjunto de valores $E\{v_i|x\}$, $i = 1, \dots, n$, define um conjunto de n retas que passam sobre o ponto emissor.

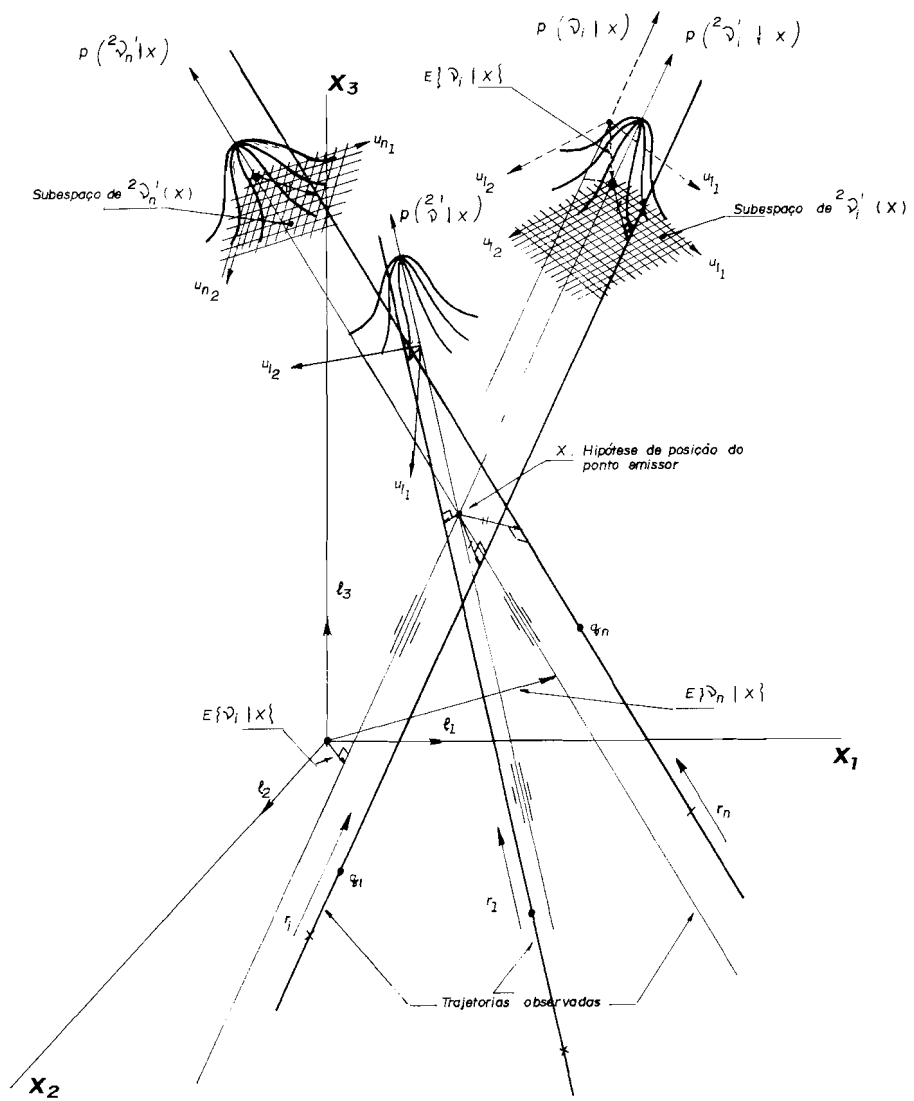


Figura 1 - Variável de Erro de Deslocamento $v'(x)$ e Posição da Trajetória v

3.1. Determinação do Erro $v'(x)$

Obtém-se nesta sub-seção o erro de deslocamento como função de x , ou seja, $v' = v'(x) = (v'(x))_0$.

Por inspeção da **Fig.2**, uma determinada trajetória observada i , no R^m , é definida por um ponto $q_i \triangleq (q_{i1}, \dots, q_{im})^T$ e um vetor unitário de direção r_i , gerando o lugar geométrico dado por $k_i r_i + q_i$, k_i real, $i = 1, \dots, n$. O vetor cujo módulo corresponde à “menor distância” da trajetória ao ponto (hipótese) $x \triangleq (x_1 \dots x_m)^T$ corresponde ao erro de deslocamento $v'(x)$ e é expresso por

$$v'_i(x) = k_i r_i + q_i - x, \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

com k_i tal que seja obedecida a condição de ortogonalidade do erro $v'(x)$ com a direção r_i , ou seja, $r_i^T \cdot v'_i(x) = 0$, o que resulta em $k_i = r_i^T(x - q_i)$. Portanto, o erro de deslocamento referente à trajetória i , considerando-se a hipótese da plataforma em x e expresso na base $\{e_1, \dots, e_m\}$ como ilustrado na **Fig.1**, é dado por

$$v'_i(x) = (r_i r_i^T - I)(x - q_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

3.2. Transformação de Base para $v'(x)$

Tem-se, por construção, que $v'_i(x) \in R^m$ e referido à base $\{e_1, \dots, e_m\}$, é ortogonal à direção da trajetória i . Desenvolve-se a expressão de $v'_i(x)$ numa nova base ortogonal $\{u_{i1}, \dots, u_{i(m-1)}, r_i\}$ e daí, por simples redução (uma vez que $v'_i(x)$ tem componente nula na direção r_i), na base $\{u_{i1}, \dots, u_{i(m-1)}\}$. Essa base caracteriza o subespaço de dimensão $(m-1)$, onde se localiza o vetor erro $v'_i(x)$. A **Fig.1** ilustra estes subespaços para o caso tridimensional.

A exceção do caso bidimensional ($x \in R^2$), várias bases ortogonais podem ser arbitrárias. Não há maiores preocupações quanto a sua escolha, caso as variâncias das projeções do vetor de erro $v'_i(x)$ em qualquer direção do seu domínio sejam iguais. Caso haja ou se deseje introduzir distinção entre as variâncias destas projeções (ou seja, quanto à “elasticidade” no deslocamento da trajetória) conforme a direção tomada, a base deverá ser convenientemente arbitrária e associadas as variâncias compatíveis.

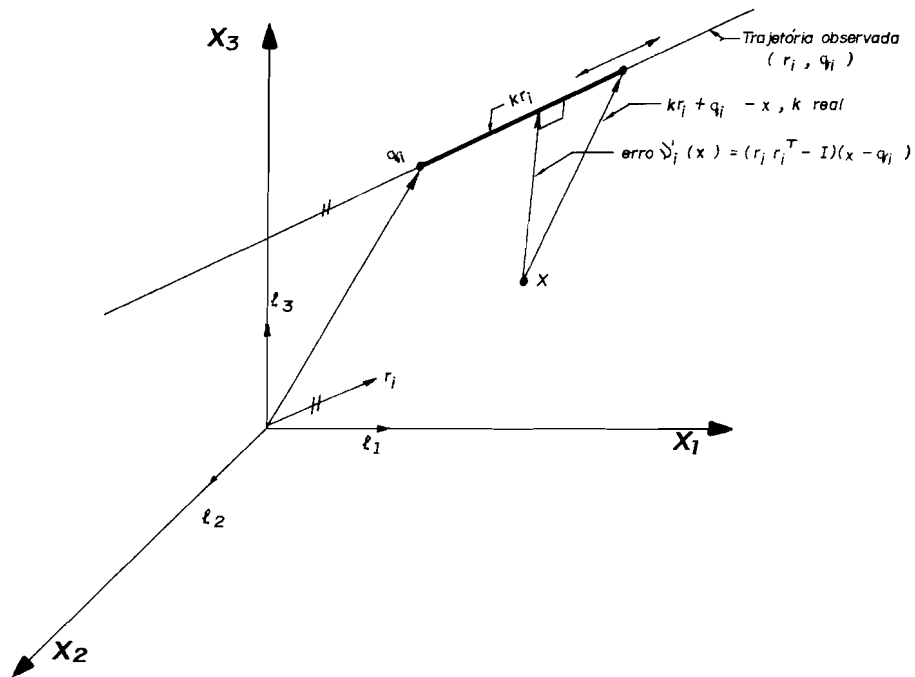


Figura 2 - Erro de Deslocamento $v'_i(x)$

Seja $v'_i(x) \triangleq (v'_{i_1}(x) \dots v'_{i_m}(x))^T$ expresso na base $\{e_1, \dots, e_m\}$ do R^m e seja $\{u_{i1}, \dots, u_{i(m-1)}, r_i\}$ uma nova base ortonormal desse espaço. Tem-se que $V'(x)$, expresso nessa nova base, é dado por

$${}^1V'_i \triangleq ({}^1v'_{i_1}(x) \dots {}^1v'_{i_m}(x))^T$$

tal que

$${}^1V'_i(x) = A_i^{-1} v'_i(x), \quad (14)$$

$$A_i = (u_{i1} \dots u_{i(m-1)}, r_i), \quad \dim m \times m \quad (15)$$

Sabendo-se que, por construção, a componente de erro é nula na direção r_i , ou seja, ${}^1v'_i(x) = 0$, pode-se expressar o vetor erro no subespaço de dimensão $(m-1)$ formado pela base $\{u_{i1}, \dots, u_{i(m-1)}\}$, tendo-se então

$$\begin{aligned} {}^2v'_i(x) &\triangleq \left({}^2v'_{i1}(x), \dots, {}^2v'_{i(m-1)}(x) \right)^T \\ &= T \cdot {}^1v'_i(x) = T \cdot A_i^{-1} v'_i(x), \text{ dim } (m-1) \times 1, \end{aligned} \quad (16)$$

$$T \triangleq \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dim } (m-1) \times m \quad (17)$$

Substituindo-se (13) em (16), tem-se

$${}^2v'_i(x) = T \cdot A_i^{-1} (r_i r_i^T - I) \cdot x - T \cdot A_i^{-1} (r_i r_i^T - I) \cdot q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

e, portanto, o erro de deslocamento referido às n trajetórias é dado por

$${}^2v'(x) \triangleq \left({}^2v'_1(x) \dots {}^2v'_n(x) \right)^T = Q x + D \quad (19)$$

onde

$$Q = \begin{pmatrix} T A_1^{-1} (r_1 r_1^T - I) \\ \vdots \\ T A_n^{-1} (r_n r_n^T - I) \end{pmatrix}, \quad \text{dim } n \cdot (m-1) \times m \quad (20)$$

e

$$D = \begin{pmatrix} -T A_1^{-1} (r_1 r_1^T - I) q_1 \\ \vdots \\ -T A_n^{-1} (r_n r_n^T - I) q_n \end{pmatrix} \quad \dim n.(m-1) \times 1 \quad (21)$$

3.3. Determinação de x^*

Substituindo-se $v'(x)$ por ${}^2v'(x)$ em (10) resulta que

$$x^* \mid \min_x \{ \Phi(x) \} \quad (22)$$

com a função $\Phi(x)$ dada por

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\triangleq {}^2v'(x)^T \cdot V_{2v'x}^{-1} \cdot {}^2v'(x) = (Qx + D)^T \cdot V_{2v'x}^{-1} \cdot (Qx + D) = \\ &= x^T Sx + 2x^T B + C \end{aligned} \quad (23)$$

onde

$$S \triangleq Q^T V_{2v'x}^{-1} Q, \quad \dim m \times m \quad (24)$$

$$B \triangleq Q^T V_{2v'x}^{-1} D, \quad \dim m \times 1 \quad (25)$$

$$C \triangleq D^T V_{2v'x}^{-1} D, \quad \dim 1 \times 1 \quad (26)$$

A matriz covariância $V_{2v'x}$ tem dimensão $n(m-1) \times n(m-1)$, sendo dada conforme (8) e (9). Considerando-se um par de trajetórias i e j , tem-se o termo em (8) dado por

$$E \{ {}^2v'_i \cdot {}^2v'_j{}^T \mid x \} =$$

$$= \begin{pmatrix} E\{^2v_{i_1} \ ^2v_{j_1}\} & \dots & E\{^2v_{i_1} \ ^2v_{j_{m-1}}\} \\ \vdots & & \vdots \\ E\{^2v_{i_{m-1}} \ ^2v_{j_1}\} & \dots & E\{^2v_{i_{m-1}} \ ^2v_{j_{m-1}}\} \end{pmatrix}, \quad \dim (m-1) \times (m-1) \quad (27)$$

Caso os erros de deslocamento associados às trajetórias de propagação sejam vetores descorrelatados entre si, o termo em (27) é matriz zero para $i \neq j$. O termo em (27) com $i=j$, representa a matriz covariância associada ao erro de deslocamento da trajetória i . Neste caso, a ocorrência de uma matriz diagonal significa que as v.as. de deslocamento da trajetória i em cada direção $u_{i_1}, \dots, u_{i_{m-1}}$ são descorrelatadas entre si. Os termos da diagonal sendo iguais, indica uniformidade em termos de “elasticidade” de movimentação em qualquer direção. Sendo diferentes, as direções $u_{i_1}, \dots, u_{i_{m-1}}$ ditarão o comportamento “não circular” em termos de probabilidade de deslocamento. Ressalte-se que, como o erro de deslocamento associado a uma dada trajetória é suposto estatisticamente independente da posição do ponto emissor, os termos em (27), e portanto as matrizes $V_{2v/x}$ são também independentes de x .

A minimização de $\Phi(x)$, dada em (23), é obtida considerando-se a condição de gradiente zero que, no caso quadrático sem restrições, é uma condição suficiente à obtenção do mínimo global^[6]. Tem-se então que

$$\Delta\Phi(x^*) = 2 Sx^* + 2B = 0 \quad (28)$$

que resulta em

$$x^* = -S^{-1} B \quad (29)$$

A expressão (29) fornece a estimativa de máxima verossimilhança da posição do ponto emissor no espaço m -dimensional, a partir do conhecimento (determinação analítica) das trajetórias de propagação emitidas pelo ponto emissor neste espaço.

7.4. Particularização para o Caso Bidimensional

Tem-se, conforme a **Fig.3**, a trajetória i dada pelo ponto $q_i \triangleq (q_{i_1}, q_{i_2})^T$ e pelo ângulo θ_i tomado trigonometricamente, ficando definida a direção $r_i = (\cos \theta_i, \text{sen } \theta_i)^T$, onde $|r_i| = 1$.

A base ortogonal a r_i gera o subespaço de dimensão 1 dado por $\{u_i\}$. Tendo-se $r_i^T \cdot u_i = 0$ e $|u_i| = 1$, resulta

$$u_i = (\text{sen } \theta_i, -\cos \theta_i)^T$$

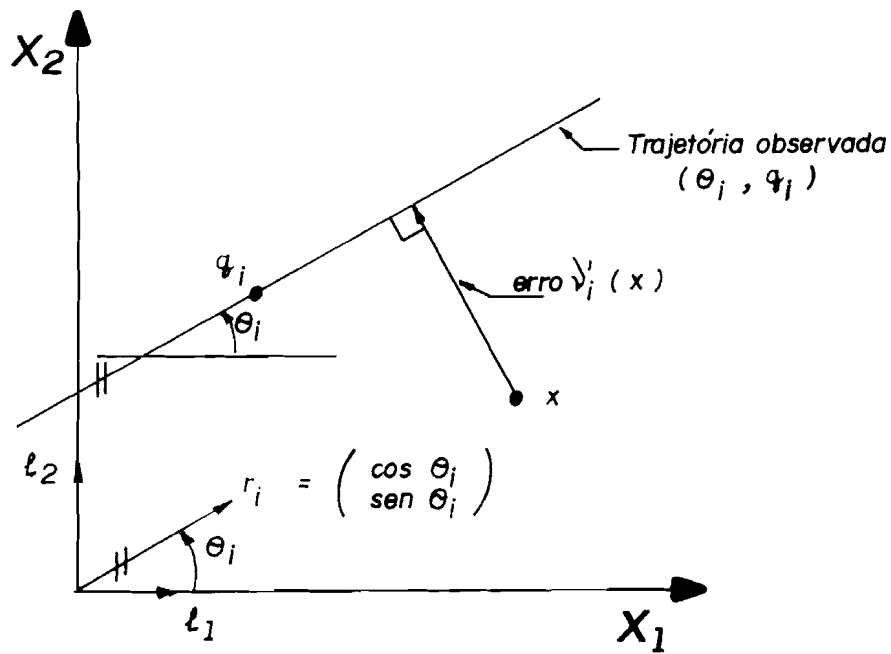


Figura 3 - Erro de Deslocamento: Caso Bidimensional

Substituindo-se $A_i = \begin{pmatrix} u_i & r_i \end{pmatrix}$ e $T=(1 \ 0)$ em (20) e (21) tem-se

$$Q = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \\ \vdots & \vdots \\ -\operatorname{sen} \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix}, \dim n \times 2 \quad (30)$$

$$D = \begin{pmatrix} q_{11} \operatorname{sen} \theta_1 - q_{12} \cos \theta_1 \\ \vdots \\ q_{n1} \operatorname{sen} \theta_n - q_{n2} \cos \theta_n \end{pmatrix}, \dim n \times 1 \quad (31)$$

e $V_{2_{v|x}}$ de dimensão $n \times n$, cujos elementos, escalares, são dados por $\sigma_{ij} \triangleq E \{ {}^2v'_i \cdot {}^2v'_j | x \}$.

Tais resultados coincidem com os desenvolvimentos em (1), específicos ao caso bidimensional.

4. Densidade de Probabilidade da Posição de um Ponto Emissor

A densidade de probabilidade $P_{x|v}^{(x|v)}$ da posição de um ponto emissor x no R^m , condicionada à observação das trajetórias de propagação a ele associadas, pode ser expressa por

$$P_{x|v}^{(x|v)} = \frac{P(x)}{P_v(x)} P_{v|x}^{(v|x)} \quad (32)$$

onde $P_{v|x}^{(v|x)}$ é dada por (5) e (23).

Considerando-se a densidade de probabilidade intrínseca da posição da plataforma, $P_x(x)$, uniforme em todo domínio de x , tem-se

$$P_{x|v}^{(x|v)} = k P_{v|x}^{(v|x)}, \text{ onde } k \text{ não depende de } x \quad (33)$$

Substituindo-se (5) e (23) em (33) e tendo-se $V_{v|x}$ e C invariantes com x e a integral de $P_{x|v}^{(x|v)}$ igual a 1 sobre o domínio de x , resulta

$$P_{x|v}^{(xiv)} = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |S|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \Phi_0(x)}, \quad (34)$$

$$\Phi_0(x) = x^T S x + 2x^T B + B^T S^{-1} B = (x + S^{-1}B)^T S (x + S^{-1} B) \quad (35)$$

com S e B dados em (24) e (25) respectivamente.

5. Superfícies de Isoprobabilidade e Domínios Ótimos de Acerto

Igualando-se (35) a uma constante, resulta

$$x^T S x + 2x^T B = k \quad (36)$$

que representam superfícies elípticas de isoprobabilidade no R^m com centro em $x^* = -S^{-1} B$. Essas superfícies, homotéticas a partir desse centro, delimitam os domínios ótimos associados às probabilidades (P) exigidas de “presença do ponto emissor” ou “sucesso de deteção ou busca” (a Fig.4 ilustra o caso bidimensional).

5.1. Base Coincidente com os Eixos da Superfície Elíptica e Translação da Origem para $-S^{-1}B$

Seja o ponto $x \triangleq (x_1, \dots, x_m)^T$ definido na base $\{e_1, \dots, e_m\}$ e $\{u_1, \dots, u_m\}$ a base ortogonal coincidente com os eixos da superfície elíptica definida em (36). Tem-se que x , expresso nessa nova base e procedendo-se à translação da origem dos eixos para $x^* = -S^{-1}B$, é dado por

$$x_u = R_u^{-1} (x + S^{-1} B), \quad (37)$$

$$R_u \triangleq (u_1 \dots u_m), \quad \dim m \times m \quad (38)$$

Por (37), as expressões (34) e (35) resultam em

$$P_{x_u|v}^{(x_u|v)} = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |S|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \Phi_u(x_u)}, \quad (39)$$

$$\Phi_u(x_u) \triangleq x_u^T S_u x_u \quad (40)$$

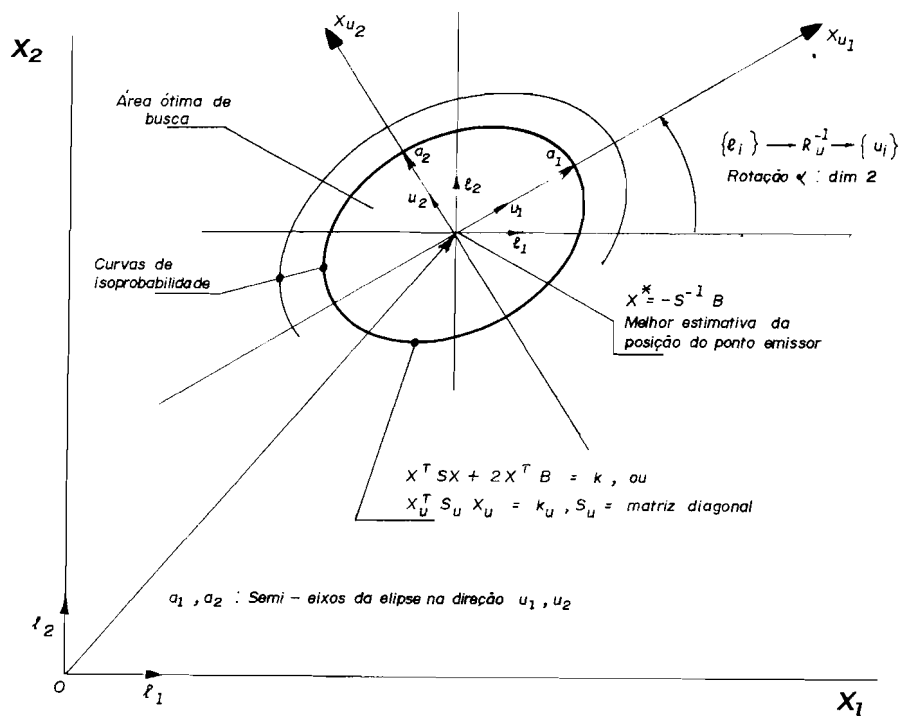


Figura 4 - Curvas de Isoprobabilidade

$$S_u \triangleq R_u^T S R_u, \quad \dim m \times m \quad (41)$$

Para que $\{u_1, \dots, u_m\}$ seja coincidente com os eixos das superfícies elípticas, S_u deverá ser matriz diagonal, ou seja

$$S_u = (s_{u_{ij}}) \text{ é tal que } s_{u_{ij}} = 0, i \neq j \quad (42)$$

Portanto $\{u_1, \dots, u_m\}$ deverá ser tal de forma a satisfazer (42) e a condição de ortogonalidade.

As expressões (34)/(35) ou (39)/(40), analiticamente realizáveis, fornecem a densidade de probabilidade de x ou x_u condicionada ao conjunto de observações.

5.2. Semi-Eixos da Superfície Elíptica

igualando-se (40) a uma constante e sabendo-se que S_u é matriz diagonal, obtém-se, no novo referencial $\{u_1, \dots, u_m\}$ definido em 5.1, a equação das superfícies de isoprobabilidade

$$x_u^T S_u x_u = \sum_{j=1}^m s_{u_{jj}} x_{u_j}^2 = k \quad (43)$$

Tomando-se em (43) $x_u = (0 \dots x_{u_j} \dots 0)^T$, obtém-se o semi-eixo da superfície elíptica de constante k , na direção u_j

$$a_j = \sqrt{k/s_{u_{jj}}} \quad , j = 1, \dots, m \quad (44)$$

5.3. Domínios Ótimos de Acerto e Probabilidades Associadas

A integral de (34) ou (39), no domínio inscrito a uma superfície elíptica de isoprobabilidade de constante k , resulta numa probabilidade de presença do ponto emissor (probabilidade de acerto ou sucesso de deteção ou busca).

$$P = 1 - e^{-k/2} \quad (45)$$

Inversamente, o domínio ótimo (do R^m) associado a P é aquele inscrito à superfície elíptica dada em (36) ou (43), de constante k tal que:

$$k = -2\ln(1-P) \quad (46)$$

5.4 - Particularização ao Caso Bidimensional

5.4.1. Base Coincidente com os Eixos da Elipse

Pode-se expressar a nova base ortogonal $\{u_1, u_2\}$ em função do parâmetro α (que corresponde ao ângulo de rotação dos eixos cartesianos no sentido trigonométrico), tendo-se $u_1 = (\cos \alpha \quad \sin \alpha)^T$ e $u_2 = (-\sin \alpha \quad \cos \alpha)^T$. Definindo-se

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \quad (47)$$

tem-se, por (38) e (41)

$$s_{u_1} = \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha (s_{22} - s_{11}) - (\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) s_{12} \quad (48)$$

Para que haja coincidência da nova base com os semi-eixos da elipse (Fig.4) deve-se ter, conforme (42), $s_{u_{12}} = 0$, que, por (48), resulta em

$$\text{tg } 2\alpha = -2s_{12}/(s_{22} - s_{11}) \quad (49)$$

tendo-se S conforme (24).

5.4.2. Semi-Eixos da Elipse

Tem-se por (43), a elipse

$$s_{u_{11}} x_{u_1}^2 + s_{u_{22}} x_{u_2}^2 = k \quad (50)$$

e, por (44), os semi-eixos nas direções u_1 e u_2 , dados respectivamente por

$$a_1 = \sqrt{k/s_{u_{11}}} \quad \text{e} \quad a_2 = \sqrt{k/s_{u_{22}}} \quad (51)$$

obtendo-se, por (38), (41) e (47)

$$s_{u_{11}} = 2s_{12} \text{sen } \alpha \cos \alpha + s_{11} \cos^2 \alpha + s_{22} \text{sen}^2 \alpha \quad (52)$$

$$s_{u_{22}} = 2s_{12} \text{sen } \alpha \cos \alpha + s_{22} \cos^2 \alpha + s_{11} \text{sen}^2 \alpha \quad (53)$$

6. Exemplos Numéricos

- I. A Fig.5 ilustra o problema bidimensional de obtenção da melhor estimativa da posição de um ponto emissor a partir das observações das trajetórias 1, 2 e 3, as quais estão associadas aos seguintes desvios padrão:

- Trajetórias 1 e 2: 24,7
- Trajetória 3: 460.01/34.9/23.0/0.0, para os casos a, b, c e d respectivamente

Tem-se também que os deslocamentos associados às tres trajetórias são estatisticamente independentes.

Conforme esperado, as estimativas, nos 3 casos, se situam sobre a bissetriz das trajetórias 1 e 2, uma vez que estas apresentam o mesmo desvio padrão. Para um desvio padrão da trajetória 3 relativamente elevado (460.0) - portanto com pouco conteúdo de informação, a estimativa coincide com o ponto de cruzamento das trajetórias 1 e 2. Para os casos b, c, e d, a estimativa se aproxima da trajetória 3 a medida que diminui o desvio padrão desta trajetória, ou seja, à medida que sua precisão aumenta, chegando a coincidir com a trajetória no caso de desvio padrão 0 - que representa certeza quanto ao posicionamento da trajetória sobre o ponto emissor.

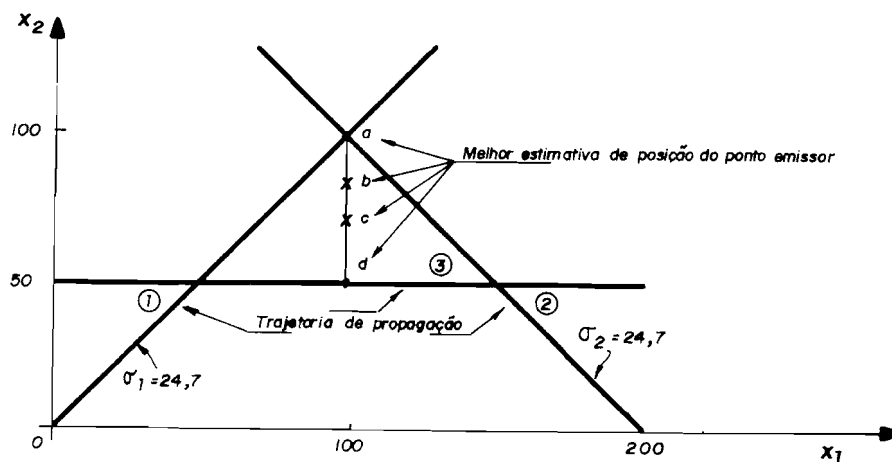


Figura 5 - Estimativa da Posição do Ponto Emissor

II. A **Fig.6** ilustra o caso bidimensional de obtenção da melhor estimativa da posição de um ponto emissor, bem como do domínio ótimo associado a uma probabilidade $P = 50\%$ de acerto a partir das observações das trajetórias 1 e 2 com os seguintes desvios padrão:

- Trajetória 1: 12,56 e 1,256 para os casos a e b, respectivamente
- Trajetória 2: 12,56

Conforme esperado, as estimativas, nos 2 casos coincidem com o ponto de cruzamento das trajetórias. A elipse que delimita o domínio ótimo de acerto no caso (a) é uma elipse alongada verticalmente, coerente com a angulação aguda das trajetórias e a simetria das mesmas, em ângulo e desvio padrão. Na transição para o caso b, a elipse diminui e praticamente se alinha sobre a trajetória 1, uma vez que seu desvio padrão se torna 10 vezes menor, ou seja, a informação se torna bem mais precisa que a da trajetória 2, concentrando em suas proximidades as maiores possibilidades de presença do ponto emissor.

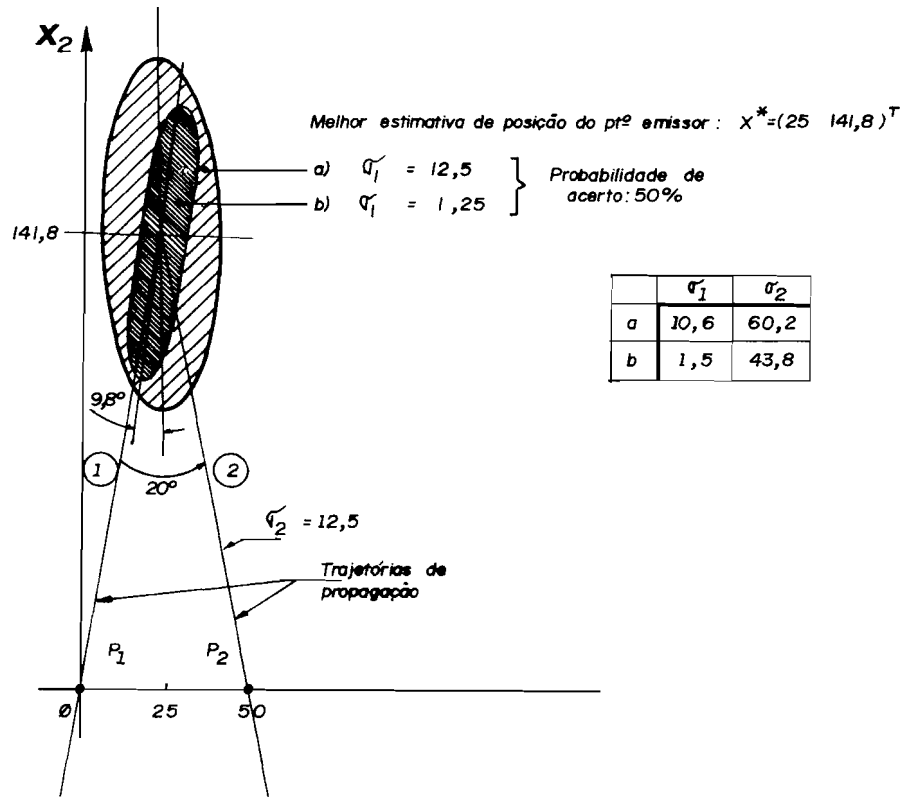


Figura 6 - Melhor Estimativa e Área Ótima de Busca

7. Comparação com Resultados Anteriores

Referente ao caso bidimensional, [3] apresenta os resultados para o problema de localização - obtenção da melhor estimativa da posição de um ponto emissor dadas as observações das trajetórias de propagação geradas pelo ponto - e para o problema de busca - obtenção do volume ótimo (de dimensão mínima) - associado a uma determinada probabilidade de sucesso de busca. Tais resultados são apresentados de forma não ma-

tricial e não permitem incorporar a correlação, porventura existente, entre os deslocamentos aleatórios das trajetórias.

Ainda para o caso bidimensional, [1] propicia uma formulação matricial compacta para a resolução do problema de localização. Os resultados permitem incorporar as correlações entre os deslocamentos aleatórios das trajetórias.

O presente trabalho generaliza a solução do problema de localização e o de busca ao caso m-dimensional, a partir de uma formulação matricial mais geral. Como em [1], é possível incorporar as correlações entre os deslocamentos aleatórios das trajetórias.

No que se refere ao problema de localização, a particularização dos resultados ao caso bidimensional recai na solução obtida em [1]. A subsequente decomposição da forma matricial resulta em [3].

Também para o problema de busca a particularização ao caso bidimensional e a subsequente decomposição da forma matricial resulta em [3].

No presente trabalho, assim como em [1] e [3], os desenvolvimentos se baseiam no critério de máxima verossimilhança.

8. Conclusão

Obeve-se, para o caso m-dimensional, a melhor estimativa da posição de um ponto emissor, dadas as observações das trajetórias de propagação geradas pelo ponto e supondo-se componentes de deslocamento gaussianas introduzidas a estas observações.

A implementação, dada numa formulação analítica e matricial, permite incorporar a correlação, porventura existente, entre os deslocamentos aleatórios das trajetórias, a nível de suas componentes ortogonais de deslocamento.

A estimativa, ótima segundo o critério de Máxima Verossimilhança, adequa-se melhor aos problemas que envolvem o conceito de autonomia de busca do que a estimativa ótima segundo o critério de minimização do erro médio quadrático (m.e.m.q.)⁽⁵⁾, tornando-se, no caso gaussiano, ótima também segundo esse critério.

Foram determinadas, para o caso m-dimensional, as densidades de probabilidade da posição do ponto emissor, assim como os volumes ótimos de detecção e busca associados à probabilidade (P) de presença do ponto emissor (probabilidades de sucesso exigidas).

Ficou evidenciada a importância da forma geométrica da superfície que delimita o volume ótimo de busca, sendo em alguns casos mais preponderante que a dimensão do volume em si.

Os resultados obtidos aplicam-se diretamente aos seguintes problemas:

- caso bidimensional: detecção, localização e busca a partir de sistemas MAGE (Medidas de Apoio a Guerra Eletrônica) e Radiogoniometria.
- caso tridimensional: detecção, localização e busca a plataformas ou objetos submersos acústica ou eletromagneticamente ativos.

Uma vez que a formulação inicial apresentada neste trabalho introduz os parâmetros de custo e probabilidade a priori, novos desenvolvimentos considerando o problema estendido com tais parâmetros são possíveis.

8. Referências

- [1] JACK BACZYNSKI. "Melhor Estimativa da Posição de uma Plataforma". *Pesquisa Naval* N° 3. Outubro, 1990.
- [2] H.L. VAN TREES. "Detection, Estimation and Modulation Theory", Part I. *John Wiley and Sons Inc.*, 1968.
- [3] P.J.D. GETHING. "Radio Direction Finding". *Peter Peregrinus Ltd.*, 1978.
- [4] A. PAPOULIS. "Probability, Random Variables and Stochastic Processes". *McGraw Hill*, 1965.
- [5] JACK BACZYNSKI. "Identificação, Filtragem e Predição para Modelos ARMA/FT e de Estado". *Tese de Mestrado - CETUC*, 1968.
- [6] DAVID G. LUEMBERGER. "Introduction to Linear and Nonlinear Programming". *Addison Wesley*, 1973.
- [7] TEODORO ONIGA. "Cálculo de um Fixo por Cruzamento de Marcações". *Estudo CASNAV* (1) E.3405.01G, 1988.



Jack Baczynski graduou-se e obteve o título de Mestre em Ciências, respectivamente em 1972 e 1977, em Engenharia Elétrica, pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Desde 1972 vem atuando na área de Engenharia de Telecomunicações e Sistemas, em indústria, consultoria e empresas do governo. Mais recentemente trabalhou no Centro de Análises de Sistemas Navais (CASNAV/MB) e na Fundação para o Desenvolvimento Tecnológico da Engenharia (FDTE/EPUSP). Trabalha desde 1990 no Depto. de Telecomunicações (SUSIS) da Companhia Vale do Rio Doce (CVRD) e cursa o doutoramento na PUC/RJ. Sua área de interesse se concentra em estimação e controle estocástico.